

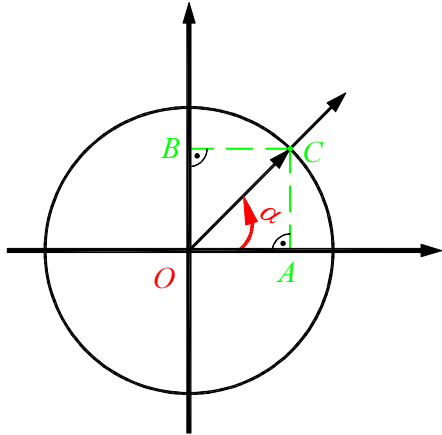
СЕМИНАРНО УПРАЖНЕНИЕ 6 ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

Променливотоков анализ (*Alternating Current (AC) analysis*)

(Основни дефиниции)

Теория

Тригонометрични функции



Фиг. 7А

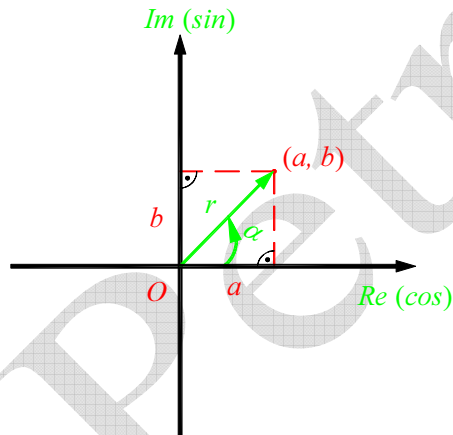
$$|OC| = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{|CA|}{|OC|} = |CA|$$

$$\cos \alpha = \frac{|OA|}{|OC|} = |OA|$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|CA|}{|OA|} = \frac{|CA|}{|OA|}$$

Всяко **комплексно число** може да се представи като точка в комплексната равнина:



Фиг. 7В

$$a + j.b = r.e^{j\alpha}$$

Декардови координати полярни координати

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

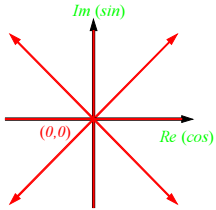
Формула на Ойлер: $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j.\sin \alpha$

⇓

$$a + j.b = r.(\cos \alpha + j.\sin \alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} a = r.\cos \alpha \\ b = r.\sin \alpha \end{cases}$$

СЕМИНАРНО УПРАЖНЕНИЕ 6 ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

Следствия от формулата на Ойлер:



Фиг. 7С

$$e^{j0^{\circ}} = \cos 0^{\circ} + j \cdot \sin 0^{\circ} = 1$$

$$e^{\pm j180^{\circ}} = \cos(\pm 180^{\circ}) + j \cdot \sin(\pm 180^{\circ}) = -1$$

$$e^{j90^{\circ}} = j$$

$$e^{-j90^{\circ}} = -j$$

$$e^{j45^{\circ}} = \cos 45^{\circ} + j \cdot \sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$$

$$e^{j135^{\circ}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + j)$$

$$e^{j225^{\circ}} = e^{-j135^{\circ}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - j)$$

$$e^{-j45^{\circ}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$$

$$j^2 = -1$$

$$(1 + j) \cdot (1 - j) = 1^2 - j^2 = 1 - (-1) = 2$$

$$(1 + j)^2 = j \cdot 2$$

$$(1 + j) = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{1}{1}} = \sqrt{2} \cdot e^{j45^{\circ}}$$

$$(-1 + j) = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{1}{(-1)}} = \sqrt{2} \cdot e^{j135^{\circ}}$$

$$(-1 - j) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{(-1)}{(-1)}} = \sqrt{2} \cdot e^{j225^{\circ}} = \sqrt{2} \cdot e^{-j135^{\circ}}$$

$$(1 - j) = \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{(-1)}{1}} = \sqrt{2} \cdot e^{-j45^{\circ}}$$

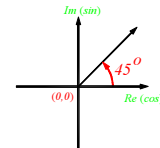
Примери:

1) $2 + j \cdot 2 = 2 \cdot (1 + j) = 2\sqrt{2} \cdot e^{j45^{\circ}}$

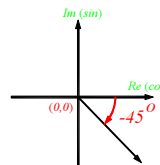
2) $4 - j \cdot 4 = 4 \cdot (1 - j) = 4\sqrt{2} \cdot e^{-j45^{\circ}}$

3) $-6 + j \cdot 6 = 6 \cdot (-1 + j) = 6\sqrt{2} \cdot e^{j135^{\circ}}$

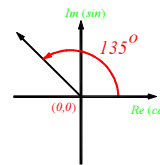
4) $-7 - j \cdot 7 = 7 \cdot (-1 - j) = 7\sqrt{2} \cdot e^{j225^{\circ}} = 7\sqrt{2} \cdot e^{-j135^{\circ}}$



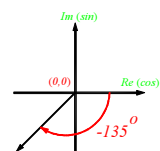
Фиг. 7D1



Фиг. 7D2



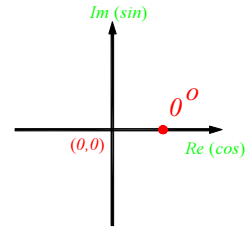
Фиг. 7D3



Фиг. 7D4

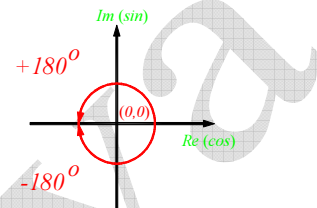
СЕМИНАРНО УПРАЖНЕНИЕ 6 ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

$$5) 17 = 17 + j \cdot 0 = \sqrt{17^2 + 0^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{0}{17}} = 17 \cdot e^{j \cdot 0^{\circ}}$$



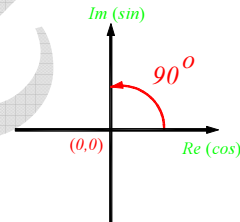
Фиг. 7D5

$$6) -15 = -15 + j \cdot 0 = \sqrt{(-15)^2 + 0^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{0}{(-15)}} = 15 \cdot e^{\pm j \cdot 180^{\circ}}$$



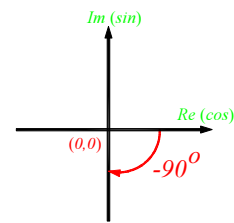
Фиг. 7D6

$$7) j \cdot 7 = 0 + j \cdot 7 = \sqrt{0^2 + 7^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{7}{0}} = 7 \cdot e^{j \cdot 90^{\circ}}$$



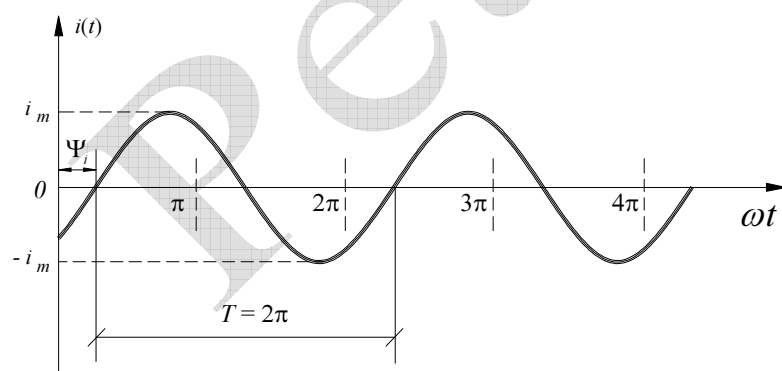
Фиг. 7D7

$$8) -j \cdot 3 = 0 - j \cdot 3 = \sqrt{0^2 + (-3)^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{(-3)}{0}} = 3 \cdot e^{-j \cdot 90^{\circ}}$$



Фиг. 7D8

Синусоидален ток



Фиг. 7E

Моментна стойност на синусоидален ток

$$i(t) = i_m \cdot \sin(\omega t + \Psi_i), \quad A$$

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ f &= \frac{1}{T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \omega, \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \text{s}^{-1}$$

$$f, \text{ Hz}$$

СЕМИНАРНО УПРАЖНЕНИЕ 6 ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

1. Комплексна форма на тока

$$i(t) = i_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = i_m \cdot (\cos(\omega t + \psi_i) + j \cdot \sin(\omega t + \psi_i))$$

$$i(t) = \text{Im}[i(t)]$$

$$i(t) = i_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)} = \sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi_i} = \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot \underbrace{I \cdot e^{j\psi_i}}_{\dot{I}} = \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot \dot{I}, \text{ където}$$

$$\Rightarrow \dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i}, \text{ където } I = \frac{i_m}{\sqrt{2}}$$

\dot{I} - комплекс (комплексна ефективна стойност);

I - ефективна стойност;

ψ_i - начална фаза на $i(t)$.

Елемент	Съпротивление при променлив ток, Ω	Комплексно съпротивление, Ω
R, Ω	R	$Z_R = R$
L, H	$X_L = \omega L$	$Z_L = j\omega L$
C, F	$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$Z_C = -j \cdot X_C = -j \cdot \frac{1}{\omega C}$

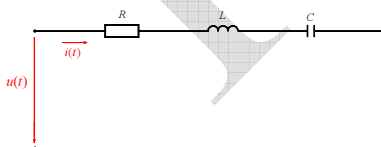
$$Z = z \cdot e^{j\varphi} = R + jX = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

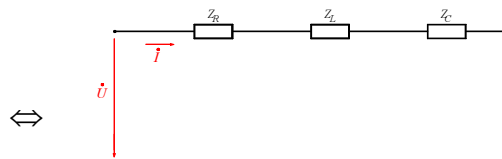
$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \text{arctg} \frac{X}{R} = \text{arctg} \frac{(X_L - X_C)}{R} = \text{arctg} \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$$

**Електрическа верига
с реални елементи**

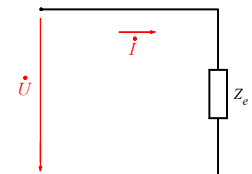


Фиг. 7F

**Комплексен еквивалент
на електрическата верига**



Фиг. 7G



Фиг. 7H

$$Z_e = Z_R + Z_L + Z_C = R + jX_L - jX_C = R + j \cdot (X_L - X_C)$$

$$Z_e = R + j \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

СЕМИНАРНО УПРАЖНЕНИЕ 6 ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

2. Измервателни апарати

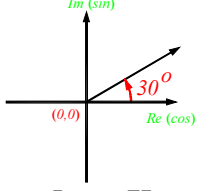
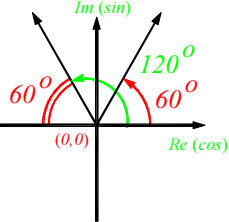
Амперметър	 Фиг. 7I	$Z_A = 0 \ \Omega$ (късо съединение) Амперметърът измерва ефективната стойност на синусоидалния ток I_A .
Волтметър	 Фиг. 7J	$Z_V \rightarrow \infty \ \Omega$ (прекъсване) Волтметърът измерва ефективната стойност на синусоидалното напрежение U_V .
Ватметър	 Фиг. 7K	$Z_{WA} = 0 \ \Omega$ (късо съединение) $Z_{WV} \rightarrow \infty \ \Omega$ (прекъсване) Ватметърът измерва активната мощност. $P = \text{Re}[\dot{S}_W] = \text{Re}[\dot{U}_W \cdot I_W^*],$ където: $\dot{I} = a + j.b \Leftrightarrow \dot{I} = a - j.b$

3. Примери

3.1. Преобразуване на моментни стойности в комплекси $u(t) \Rightarrow \dot{U}$

1)	$u(t) = 5\sqrt{2} \sin \omega t, V$	\Rightarrow	$\dot{U} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j0^\circ} = 5, V$
2)	$u(t) = 7\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ), V$	\Rightarrow	$\dot{U} = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j90^\circ} = j7, V$
3)	$u(t) = 6\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ), V$	\Rightarrow	$\dot{U} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j90^\circ} = -j6, V$
4)	$u(t) = 3\sqrt{2} \sin(\omega t \pm 180^\circ), V$	\Rightarrow	$\dot{U} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pm j180^\circ} = -3, V$
5)	$u(t) = 10 \sin(\omega t + 45^\circ), V$	\Rightarrow	$\dot{U} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot e^{j45^\circ} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1+j) = 5 \cdot (1+j), V$
6)	$u(t) = 20 \sin(\omega t + 135^\circ), V$	\Rightarrow	$\dot{U} = \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot e^{j135^\circ} = \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1+j) = 10 \cdot (-1+j), V$
7)	$u(t) = 12 \sin(\omega t - 135^\circ), V$	\Rightarrow	$\dot{U} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j135^\circ} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-1-j) = 6 \cdot (-1-j), V$
8)	$u(t) = 14 \sin(\omega t - 45^\circ), V$	\Rightarrow	$\dot{U} = \frac{14}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j45^\circ} = \frac{14}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1-j) = 7 \cdot (1-j), V$
9)	$u(t) = 8\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ), V$		

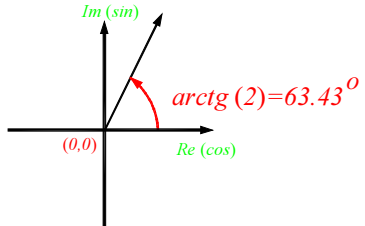
СЕМИНАРНО УПРАЖНЕНИЕ 6 ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА

	 <p style="text-align: center;">Фиг. 7L</p>	⇒	$\dot{U} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j30^\circ} = 8 \cdot (\cos 30^\circ + j \cdot \sin 30^\circ) = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \cdot \frac{1}{2} \right) = 4 \cdot (\sqrt{3} + j), V$
10)	 <p style="text-align: center;">Фиг. 7M</p>	⇒	$\dot{U} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j120^\circ} = 12 \cdot (\cos 120^\circ + j \cdot \sin 120^\circ) = 12 \cdot (-\cos 60^\circ + j \cdot \sin 60^\circ) = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6 \cdot (-1 + j \cdot \sqrt{3}), V$

3.2. Преобразуване на комплекси в моментни стойности $\dot{U} \Rightarrow u(t)$

1)	$\dot{U} = 3 = 3 \cdot e^{j0^\circ} = U \cdot e^{j\psi_u}, V$	⇒	$u(t) = U \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \psi_u) = 3\sqrt{2} \sin \omega t, V$
2)	$\dot{U} = j \cdot 8 = 8 \cdot e^{j90^\circ} = U \cdot e^{j\psi_u}, V$	⇒	$u(t) = 8\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ), V$
3)	$\dot{U} = -j \cdot 7 = 7 \cdot e^{-j90^\circ} = U \cdot e^{j\psi_u}, V$	⇒	$u(t) = 7\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ), V$
4)	$\dot{U} = -5 = 5 \cdot e^{\pm j180^\circ} = U \cdot e^{j\psi_u}, V$	⇒	$u(t) = 5\sqrt{2} \sin(\omega t \pm 180^\circ), V$
5)	$\dot{U} = (1 + j) = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot e^{j \arctg \frac{1}{1}} = \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} = U \cdot e^{j\psi_u}, V$	⇒	$u(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 45^\circ) = 2 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ), V$
6)	$\dot{U} = (-2 - j \cdot 2) = 2 \cdot (-1 - j) = 2 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \cdot e^{j \arctg \frac{(-1)}{(-1)}} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-j135^\circ} = U \cdot e^{j\psi_u}, V$	⇒	$u(t) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 135^\circ) = 4 \cdot \sin(\omega t - 135^\circ), V$
7)	$\dot{U} = (3 - j \cdot 3) = 3 \cdot (1 - j) = 3 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \cdot e^{j \arctg \frac{(-1)}{1}} = 3\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = U \cdot e^{j\psi_u}, V$	⇒	$u(t) = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) = 6 \cdot \sin(\omega t - 45^\circ), V$
8)	$\dot{U} = (-7 + j \cdot 7) = 7 \cdot (-1 + j) = 7 \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot e^{j \arctg \frac{1}{(-1)}} = 7\sqrt{2} \cdot e^{j135^\circ} = U \cdot e^{j\psi_u}, V$	⇒	$u(t) = 7 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 135^\circ) = 14 \cdot \sin(\omega t + 135^\circ), V$
9)	$\dot{U} = (1 + j \cdot 2) = \sqrt{1^2 + 2^2} \cdot e^{j \arctg \frac{2}{1}} = \sqrt{5} \cdot e^{j63,43^\circ} = U \cdot e^{j\psi_u}, V$	⇒	

СЕМИНАРНО УПРАЖНЕНИЕ 6
ПО ТЕОРЕТИЧНА ЕЛЕКТРОТЕХНИКА



Фиг. 7N

$$u(t) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 63,43^\circ) = \\ = \sqrt{10} \cdot \sin(\omega t + 63,43^\circ), V$$

Ретракієва