Измервания в електрониката

Модул 2: Систематични и случайни грешки. Разпространение на грешките

2. Систематични и случайни грешки. разпространение на грешките.

1. Основни видове грешки
2. Динамични грешки
3. Систематични грешки
4. Случайни грешки

2.1. Основни видове грешки

- Измерванията винаги са съпроводени с грешки

- Действителната стойност x_N принципно е неизвестна

$\Rightarrow$ **Основна задача:**
Максимално доближаване до действителната стойност x_N

$\Delta X = X_{ИЗМЕРЕНО} - X_N$ – абсолютна грешка

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_N} \approx \frac{\Delta x}{x_{ИЗМЕРЕНО}}$$ **– относителна грешка**

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_{MAX}}$$ **– приведена грешка, X_{MAX} – крайна стойност на обхвата**

2.1. Основни видове грешки

- Точност на аналогови уреди
  - За спецификацията се използва приведена грешка/клас на точност К.
  - В сила са зависимостите

$$\Delta x_g = \frac{K \cdot X_{MAX}}{100} = K\% \cdot X_{MAX}$$

$$\delta x_g = \frac{\Delta x_g}{x_i} = K\% \cdot \frac{X_{MAX}}{x_i} \geq K\%$$

- **Индустриални измервателни уреди: K=1; 1,5; 2,5; 5**
- **Лабораторни измервателни уреди: K=0,05; 0,1; 0,2; 0,5**

2.1. Основни видове грешки

- Точност на цифрови уреди
  - За спецификацията се използва формула, която включва мултипликативна и адитивна съставка:

$$\Delta x = \pm\left(A\% \cdot x_{ИЗМЕРЕНО} + C\right)$$

- Грешката е мултипликативна, когато относителната й стойност е неизменна в целия измервателен обхват.
- Грешката е адитивна, когато абсолютната й стойност е неизменна в целия измервателен обхват.

2.1. Основни видове грешки

- Грешката често се дава и в следния вид:

$$\Delta x = \pm\left(A\% \cdot x_{ИЗМЕРЕНО} + m\,EMP\right)$$

$$\Delta x = \pm\left(A\% \cdot x_{ИЗМЕРЕНО} + m\,LSB\right)$$

$$\Delta x = \pm\left(A\% \cdot x_{ИЗМЕРЕНО} + m\,Digit\right)$$

2.1. Основни видове грешки

$$\Delta x = \pm\left(A\% \cdot x_{ИЗМЕРЕНО} + C\right)$$

- Двете съставки могат да се разглеждат като
  - грешка на коефициента на усилване и
  - грешка на отместването на нулата

± (gain error + offset error)

2.1. Основни видове грешки

- Точност на цифрови уреди
- Показанието на уреда често се дава с брой значещи цифри:
  - Най-често n или n½:
- Например цифров волтметър с 4 значещи цифри:

+4,	3	2	3	V

  - Максимална стойност, която може да се представи:

+9,	9	9	9	V

  - Съответства на обхват 10 V:
  - Чрез преместване позицията на десетичната запетая се получават различни обхвати ..., 1 V, 10 V, 100 V, ...

2.1. Основни видове грешки

- Например цифров волтметър с 3½ значещи цифри:

0	3,	2	3	V

- Максимална стойност, която може да се представи:

+1	9,	9	9	V

+1	9	9	9	V

- Съответства на обхват 20 V:
- Чрез преместване позицията на десетичната запетая се получават обхвати ..., 2 V, 20 V, 200 V, ...

2.1. Основни видове грешки

- При някои уреди първата позиция може да има стойности не само 0 и 1, но и 0, 1, 2 или 0, 1, 2, 3.
- В тези случаи се получават измервателни обхвати...,3, 30, 300,... или ..., 4, 40, 400,...
- Индикацията на такива уреди понякога се означава като n ¾ значещи цифри .

2.1. Основни видове грешки

- Пример:

Цифров мултимер, обхват 2V,

Грешка = ± (0,03% $U_{ИЗМЕРЕНО}$+ 0,01% $U_{ОБХВАТ}$)

•За входен(измерван) сигнал 0,5V

Грешка = ± (0,03% · 0,5V + 0,01%· 2,0V)

= ± (0.00015V + 0,00020V) = ± 350 μV

Измерената стойност трябва да е в границите от 0,49965V до 0,50035V.

•За входен сигнал 1,5V се получава

Грешка = ± (0,00045V + 0,00020V) = ± 650 μV

2.1. Основни видове грешки

Задача:

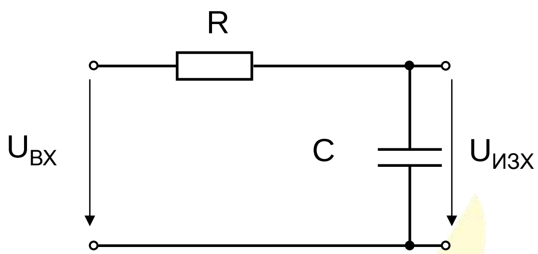
- Цифров волтметър, работещ в обхват 2V (1,999 V) допуска интегрална абсолютна грешка

$$\pm(0{,}03\% \cdot U_{ИЗМЕРЕНО} + 0{,}01\% \cdot U_{ОБХВАТ})$$

  - Изчислете относителната стойност на допустимата интегрална грешка за следните точки от скалата: 0,2 V, 0,5 V, 1V, 1,5 и 1,9 V.
  - В обща координатна система изобразете графично зависимостите на абсолютните и на относителните стойности на грешката от стойностите на измерваната величина.

2.2. Динамични грешки

2.2. Динамични грешки



$$G(j\omega)=\frac{\underline{U}_{\text{ИЗХ}}}{\underline{U}_{\text{ВХ}}}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{1}{1+j\omega T}$$

За честотата на срез f_C е валидно:

$$\omega_C T = 2\pi f_C T = 1$$

$$\text{Оттук } T=\frac{1}{2\pi f_C}.$$

$$G(f)=\frac{f_C}{jf+f_C},\ |G|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_C}\right)^2}}$$

2.2. Динамични грешки

При наличие на коефициент на усилване G_0

$$G(f)=G_0\frac{f_C}{jf+f_C},\ |G|=G_0\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_C}\right)^2}}$$

Амплитудна грешка:

$$\delta_A=\frac{|G|-|G_0|}{|G_0|}$$

Фаза:

$$\varphi(\omega)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)_{\text{Числител}}-\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)_{\text{Знаменател}}=-\arctan\omega T=-\arctan\frac{2\pi f}{2\pi f_C}=-\arctan\frac{f}{f_C}$$

2.2. Динамични грешки

При наличие на коефициент на усилване G_0

$$G(f) = G_0 \frac{f_C}{jf + f_C}, \quad |G| = G_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_C}\right)^2}}$$

Амплитудна грешка:

$$\delta_A = \frac{|G| - |G_0|}{|G_0|}$$

Фаза:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)_{\text{Числител}} - \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)_{\text{Знаменател}} = -\arctan \omega T = -\arctan \frac{2\pi f}{2\pi f_C} = -\arctan \frac{f}{f_C}$$

2.3.Систематични грешки

- Причините за систематичните грешки са известни
- Може да се определи големината и знака на грешката ΔX, а оттук и действителната стойност X_N

$$x_N = x - \Delta x$$

Δx – Абсолютна грешка

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_N} \approx \frac{\Delta x}{x}$$

- Относителна грешка

2.3. Систематични грешки

- Разпространение на систематичните грешки
  - Често дадена величина y не може да се измери директно, но е известна функция на величини x_i , които могат да се измерят с грешки Δx_i:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

  - Грешките Δx_i водят до обща грешка Δy , която трябва да се изчисли.
  - С Δy се означава разликата между “неправилната” и “правилната" функционална стойност:

$$\Delta y = y - y_N,$$

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2 \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2.3. Систематични грешки

- Разпространение на систематичните грешки
  - Развитие в ред на Тейлър:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i \text{ за } \Delta x_i << x_i$$

  - В това уравнение отделните грешки Δx_i трябва да се заместят със съответния знак и да се коригира функционалната стойност y :

$$y_N = y - \Delta y.$$

Пример

- За консуматор на ел. енергия са направени измервания със следните относителни грешки:

$$\frac{\Delta U}{U} = -0{,}011; \quad \frac{\Delta I}{I} = 0{,}02; \quad \frac{\Delta R}{R} = -0{,}031.$$

- Да се изчисли относителната грешка на консумираната мощност.

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = U^2 R^{-1}.$$

Пример- решение

$$\frac{\Delta P}{P} = 2\frac{\Delta U}{U} - 1\frac{\Delta R}{R} = 2(-0{,}011) - (-0{,}031) = +0{,}009.$$

- Измерена е мощност с 0,9% по-голяма от действителната.
- Измерената стойност може да се коригира съответно.

2.4. Случайни грешки

- Предизвикват се от изменения, които не могат да измерят: (напр. измервателен уред, околна среда)
- Стойността и знакът не могат се определят

Решение – оценка на грешката чрез използване на статистически методи:

- Повтаряне на n измервания: $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$

  Изчисляване на средна стойност:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.4. Случайни грешки

- Средна стойност и стандартно отклонение

Средна стойност на случайна величина x:

$$\bar{x} = x_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{за } N \to \infty,$$

Където N – брой на измерванията.

x_N се означава като действителната стойност, която има следните свойства:

$$\sum (x_i - x_W) = 0,$$

$$\sum (x_i - x_W)^2 = \text{Minimum}.$$

2.4. Случайни грешки

- Мярка за разсейването на измерените стойности около действителната стойност е дисперсията:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_N)^2 \text{ за } N \to \infty.$$

- Положителният квадратен корен на дисперсията се означава като Стандартно отклонение σ.

2.4. Случайни грешки

- На практика N<∞:

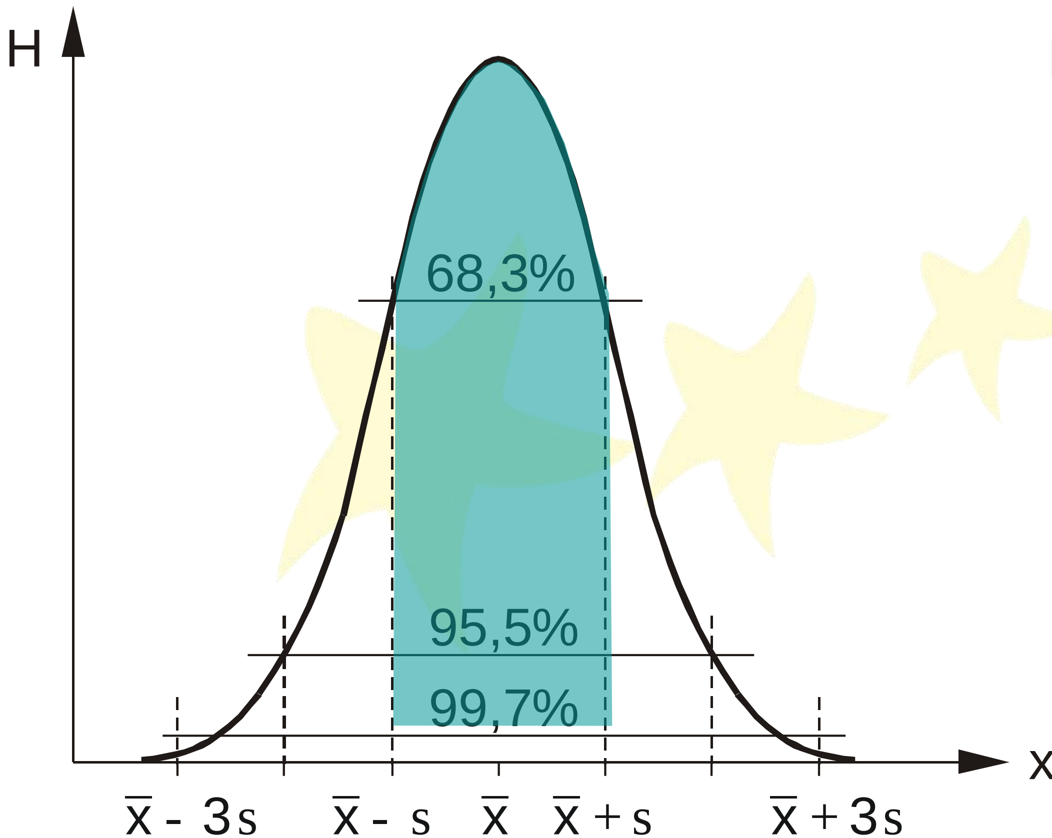
$$\bar{x} = \hat{x}_W = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{за } N \to \infty,$$

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x}_W)^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2.$$

- Положителният квадратен корен s:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

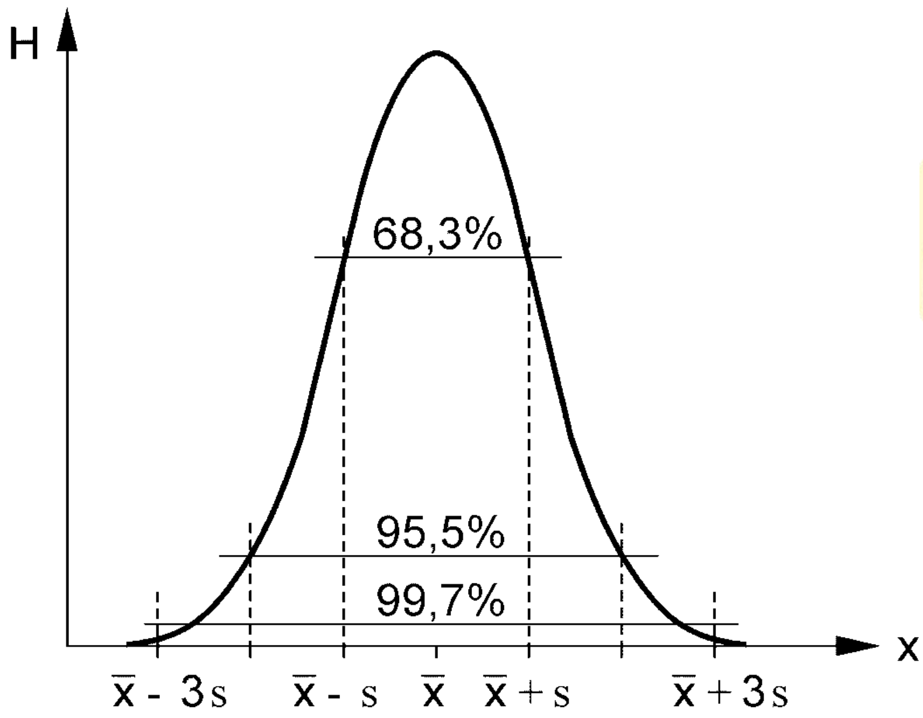
2.4. Случайни грешки



- 68,3 % се намират в областта

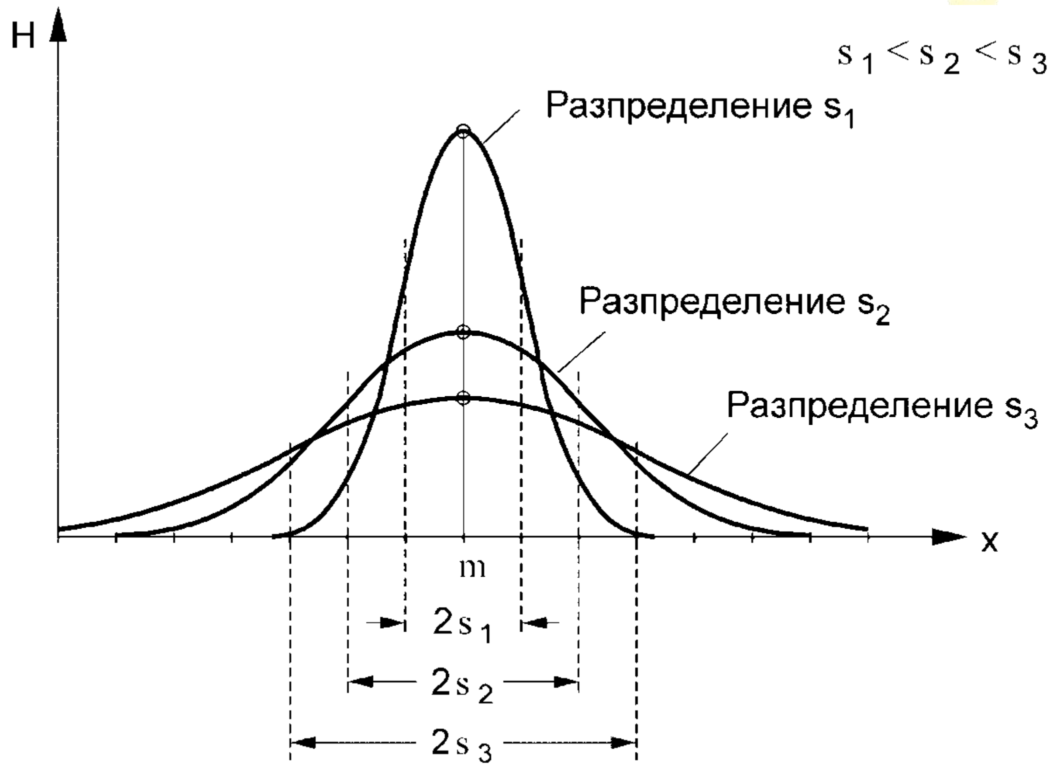
$\bar{x} \pm s$,

2.4. Случайни грешки



- В случай, че са извършени достатъчен брой независими едно от друго измервания, то измерените стойности са разпределени нормално.

2.4. Случайни грешки



2.4. Случайни грешки

- Разпространение на случайните грешки

  Отново разглеждаме величината y, която се изчислява въз основа на величините $x_1, x_2,...,x_n$, които могат да се измерят:

$$y = f(x_1, x_2, ... x_n).$$

- Тъй като са налице случайни грешки се извършва многократно измерване на величините $x_1, x_2,...,x_n$, след което се изчисляват съответните средни стойности и стандартни отклонения.

- Стойностите за y са също случайно разпределени. Задачата е да се намери алгоритъм за изчисляване на средната стойност и на стандартното отклонение на разпределението.

2.4. Случайни грешки

a) Изчисляване на средната стойност въз основа на средните стойности на измерваните величини:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n).$$

b) Изчисляване на стандартното отклонение въз основа на стандартните отклонения на измерваните величини

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s_i^2}.$$

2.4. Случайни грешки - обобщение

	Формула	**Забележка**
Стандартно отклонение $N \to \infty$	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_W)^2}$	
Стандартно отклонение $N < \infty$	$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$	
Грешка на средната стойност	$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$	
Закон за разпространение на грешките	$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2}$	Геометрично събиране на частни диференциали

Задача 1

- При 10 последователни измервания са получени следните резултати:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{U_i}{mV}$	995	993	1006	994	1003	1001	999	1005	1000	1004

- Изчислете:
  - Средната стойност
  - Стандартното отклонение
  - Грешката на средната стойност

Задача 1

- Средна стойност

$$\overline{U} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$\overline{U} = \frac{995+993+1006+994+1003+1001+999+1005+1000+1004}{10}\,mV$$

$$\overline{U} = 1000\,mV$$

Задача 1

- Стандартно отклонение (единично измерване)

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x)^2}{n-1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{(25+49+36+36+9+1+1+25+0+16)}{9}} mV$$

$$s = \sqrt{22} mV = 4{,}7 mV$$

Задача 1

- Грешка на средната стойност

$$s_{\overline{U}_n} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{22mV}}{\sqrt{10}} = 1{,}5mV$$

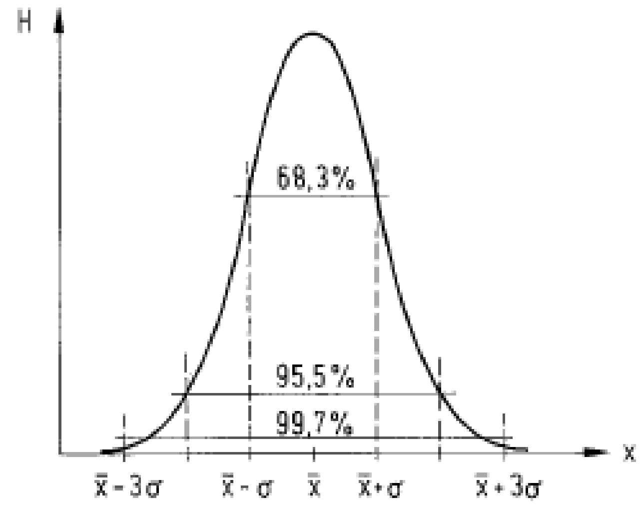
Задача 2

- Единичните стойности xi при многократни последователни измервания са разпределени нормално.
- Нормалното разпределение се характеризира със съответна средна стойност и стандартно отклонение: $\overline{\mathrm{x}}, \mathrm{s}$

- Изчислете вероятността P, за която е в сила:

$$x_i > \overline{x} + 3s$$

Задача 2



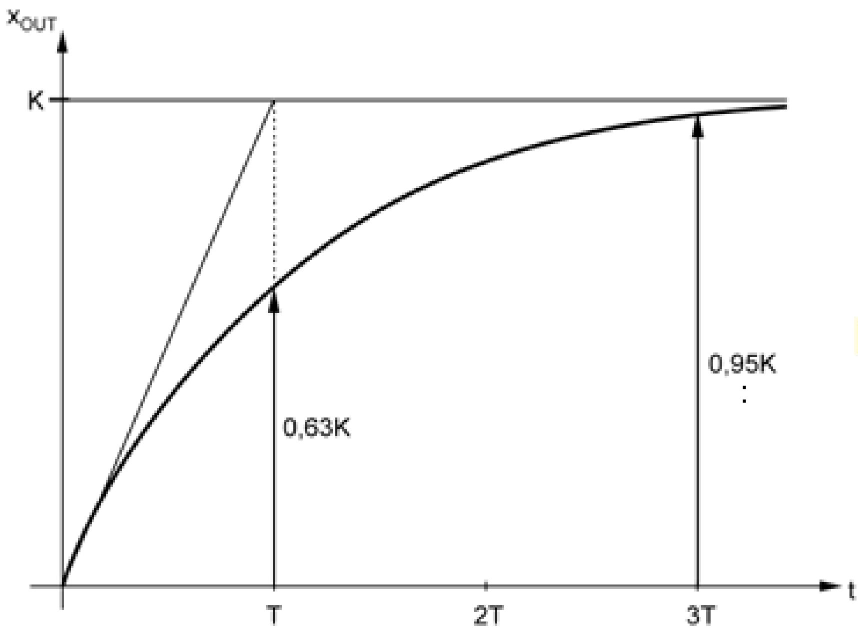
$$P\left(\bar{x}-3s < x < \bar{x}+3s\right) = 99{,}7\%$$

$$P\left(x < \bar{x}-3s\right) + P\left(x > \bar{x}+3s\right) = 0{,}3\%$$

- Поради симетрия:

$$P = 0{,}15\%$$

Задача 3
Динамични грешки



$$x_{OUT} = x_{IN}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

За t = T и $x_{IN} = K$

$$x_{OUT} = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = K\left(1 - e^{-1}\right)$$

$$x_{OUT} = K(1 - 0{,}36788) = K \cdot 0{,}6321$$

Фиг. Преходна характеристика на апериодично звено от първи ред

Задача 3
Динамични грешки

- Пример
  - Линеен сензор за налягане има времеконстанта 3,1s и предавателна функция 29mV/kPa.
    - Какво е нивото на изходния сигнал след 1,3 s ако налягането се повиши от 17 на 39kPa?
    - Каква е грешката при измерване на налягането?

Задача 3
Динамични грешки

- Пример
  - Линеен сензор за налягане има времеконстанта 3,1s и предавателна функция 29mV/kPa.
    - Какво е нивото на изходния сигнал след 1,3 s ако налягането се повиши от 17 на 39kPa?

$$\mathrm{A}(17\mathrm{kPa}) = 17 \cdot 29\mathrm{mV} = 493\mathrm{mV}$$

$$\mathrm{A}(39\mathrm{kPa}) = 39 \cdot 29\mathrm{mV} = 1131\mathrm{mV}$$

$$A(39kPa;1,3s) = 493mV + (1131mV - 493mV)\left(1 - e^{-\frac{1,3}{3,1}}\right) = 711,53mV$$

Задача 3
Динамични грешки

- Пример

    - Каква е грешката при измерване на налягането?

$$\text{Налягане след } 1,3\ s = \frac{711,55mV}{29\dfrac{mV}{kPa}} = 24,54kPa$$

$$\Delta = 39 - 24,54 = 14,46kPa$$

Литература

- ***Dennis S. Bernstein,*** Sensor Performance Specifications. IEEE Control Systems Magazine, August 2001

Благодаря за вниманието!