# 2. ГРЕШКИ ПРИ ИЗМЕРВАНИЯТА И ОБРАБОТКА НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Целта на упражнението е да се запознаят студентите с методите за анализ на грешките при отговорни измервания, като се даде оценка на истинската стойност на измерваната величина.

В упражнението тези методи се илюстрират с пример за косвено измерване на електрическо съпротивление.

## 2.1. Задачи за изпълнение

1. Да се извърши многократно косвено измерване на съпротивление чрез измерване на ток и напрежение, като систематичната съставяща на общата грешка се изключи, чрез подходящо провеждане на измерването.
2. Да се отстранят грубите грешки в резултатите от измерването.
3. Да се оценят параметрите на статистическите характеристики на емпиричните данни.
4. Да се оценят параметрите на статистическите характеристики на теоретичното множество от данни (генералната съвкупност), като се потвърди или отхвърли хипотезата за нормалност на разпределението.
5. Да се определят компонентите на общата грешка, присъща на метода за косвено измерване на съпротивление.
6. Да се изчисли стойността на измереното съпротивление чрез използването на апроксимиращ полином.

## 2.2. Теоретични постановки и методически указания

### *2.2.1. Теоретични постановки*

По характера на изменението си грешките в резултатите от измерването биват систематични и случайни. При многократните измервания е възможно наличието на ограничен брой резултати, съществено различаващи се от останалите. В тези случаи е необходимо да се прецени дали тези резултати са допустими, или са следствие от нарушение на нормалните условия на измерването. В последния случай получените грешки се явяват груби грешки, а съответните резултати трябва да се отстранят от по-нататъшна обработка.

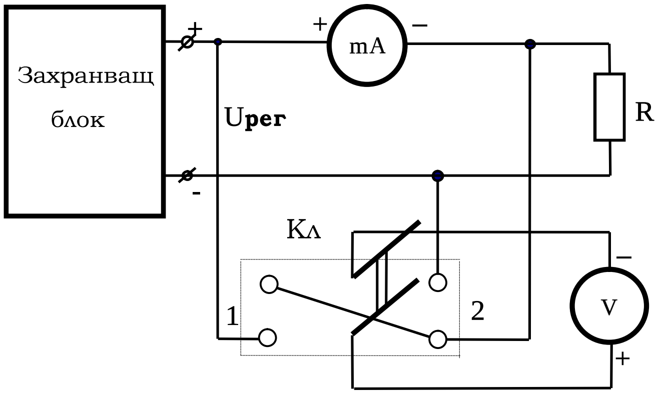
***Систематичните грешки*** се обуславят от свойствата на използваните средства за измерване и използвания метод. Те остават постоянни в процеса на измерване или се променят съгласно определена закономерност. Възможно е в продължителни периоди от време причините, предизвикващи систематичните грешки, да се изменят по случайни закони, така че характеристиките, присъщи на случайните грешки, са приложими и за оценка на систематичните грешки. Влиянието на систематичните грешки върху резултата от измерването може да бъде установено предварително и частично да бъде изключено.

За електрическата схема от фиг. 2.1, ако измерването се проведе само при положение *2* на ключа *K*, при зададени вътрешно съпротивление на милиамперметъра $R_A$ и вътрешно съпротивление на волтметъра $R_V$, могат да се определят по изчислителен път корекциите на резултата, за да се отстранят систематичните грешки. Може да се докаже, че ако неизвестното съпротивление ***R*** се определя от измерените стойности $U_i^{(2)}, I_i^{(1)}$ по израза

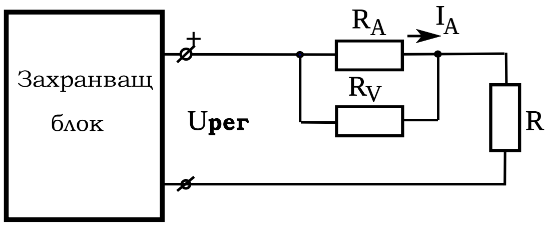
$$R_i = \frac{U_i^{(2)}}{I_i^{(1)}}, i = [1,...,n], \tag{2.1}$$

където $U_i^{(2)}$ е показанието на волтметъра при положение *2* на ключа *К*, а $I_i^{(1)}$ е съответното показание на милиамперметъра при положение *1* на ключа, то в резултата от измерването няма да се съдържа систематична грешка. Това е така, защото $I_i^{(1)} = I_i^{(2)}$, където $I_i^{(2)}$ е стойността на тока през съпротивлението, когато върху него е измерено напрежение $U_i^{(2)}$.

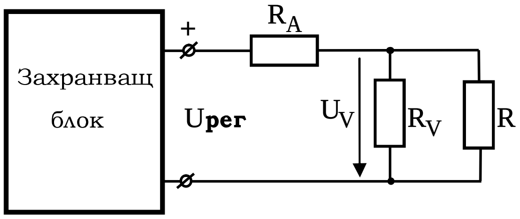
***Доказателство:*** Нека ключът - ***К*** (Фиг. 2.1) да е в позиция *1* и нека напрежението на захранващия източник да бъде $U_{рег}$. Тогава еквивалентната схема ще бъде, както е показано на фиг. 2.2.



***Фиг. 2.1.***



***Фиг. 2.2.***



***Фиг. 2.3.***

В този случай стойността на тока $I_A$ може да се изведе от следното уравнение: $\mathrm{I_A R_A} + \left( I_A + \frac{I_A R_A}{R_V} \right) R = U_{рег}$, където изразът в скоби представлява сумата на токовете през $\mathrm{R_A}$ и $\mathrm{R_V}$. След преобразование се получава:

$$\mathrm{I_A R_A} + I_A R\frac{R_V + R_A}{R_V} = U_{\text{рег}} \quad \text{или} \quad \mathrm{I_A}\frac{R_A R_V + R(R_A + R_V)}{R_V} = U_{\text{рег}},$$

следователно: $I_A = U_{\text{рег}}\dfrac{R_V}{R_A R_V + R\left(R_A + R_V\right)}$

От друга страна, ако ключът - *K* е в позиция *2*, еквивалентната електрическа схема ще има вида, показан на фиг. 2.3. Тогава напрежението $U_V$ ще се намери по следния начин:

$$\mathrm{U_V} = R_A\left(\frac{U_V}{R_V} + \frac{U_V}{R}\right) = U_{\text{рег}} \qquad \text{или} \qquad \mathrm{U_V} + U_V R_A\frac{R_V + R}{R_v R} = U_{\text{рег}}$$

$$\mathrm{U_V}\frac{RR_V + R_A R_V + R_A R}{RR_V} = U_{\text{рег}} \Rightarrow U_V = U_{\text{рег}}\frac{RR_V}{R_A R_V + R\left(R_A + R_V\right)}$$

След заместване се получава:

$$\text{(2.2)} \qquad \mathrm{R_{изч}} = \frac{\mathrm{U_V}}{\mathrm{I_A}} = \frac{U_{\text{рег}} RR_V}{R_A R_V + R\left(R_A + R_V\right)} \cdot \frac{R_A R_V + R(R_A + R_V)}{U_{\text{рег}} R_V} = R$$

***Случайни грешки.*** Грешките, предизвикани от случайни влияещи и изменящи се фактори, се наричат случайни грешки. Обикновено е невъзможно да се определи както точното влияние, което оказват отделните фактори, така и в кои моменти от измервателния процес те действат. Задачата, която се поставя при наличието на посочената неопределеност, е да се даде оценка на възможните отклонения от действителния резултат, които биха се получили в процеса на измерване.

Такава оценка е възможна само след изграждането на математичен модел на разпределението на грешката с помощта на теорията на вероятностите и математическата статистика.

***Основни понятия и определения от теорията на вероятностите.*** Функцията *P(x)*, която дава връзката между стойностите $x_i$ на променливата случайна величина *X* и вероятностите за тяхното появяване $P_i$ , се нарича закон за разпределение на тази величина.

Законът за разпределение на случайната величина може да се зададе таблично, да се изрази графично във вид на крива на вероятностите или да се опише със съответна формула. Тъй като величината *X* може да бъде дискретна или непрекъсната, то и законите за разпределение биват дискретни и непрекъснати. Непрекъснатата величина има безкрайно голямо множество от стойности дори и в ограничен интервал $x_{min}$ - $x_{max}$. Ако на всяка от тези стойности трябва да се присвои определена вероятност на поява (от *0* до *1*), се стига до противоречие, тъй като тези вероятности трябва да отговарят и на неизпълнимото условие $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$. Затова по-правилна е такава постановка на задачата, при която за непрекъснатата случайна величина се разглежда вероятността тя да попадне в зададен интервал $(x, x+\Delta x)$. Ако този интервал е достатъчно малък, може да се приеме, че тази вероятност е пропорционална на големината му, т.е. $\Delta P = W(x).\Delta x$. Функцията $W(x)$ се нарича плътност на вероятностите. Смисълът й се състои в това, че произведението $W(x).\Delta x$ дава вероятността, измерена при единичен експеримент стойност да попадне в интервала $(x, x+\Delta x)$. Гаус (1821г.) е установил, че вероятността $dP$ за произволна стойност $x_i$ на непрекъснато разпределената случайна величина $X$ да се намира в интервала от $x$ до $x+dx$ се изразява с формулата:

$$dP(x) = W(x).dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}.\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}.dx, \tag{2.3}$$

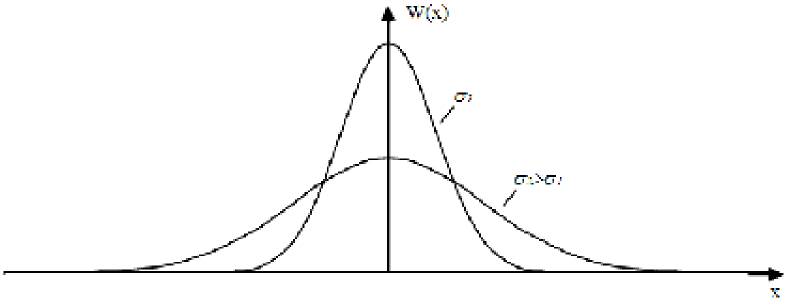
където:

- $\sigma$ е средноквадратичното отклонение, характеризиращо степента на разсейване на стойностите $x_i$ на случайната величина $X$ около средната стойност;
- $\mu$ - математическото очакване.

Това разпределение е известно под името *нормално* (Гаусово) разпределение. На практика то съществува винаги за случайна непрекъсната величина, която представлява сума от $4$ и повече случайни, независими и равностойни величини, с произволни закони на разпределение.

Точното определяне на параметрите на Гаусовото разпределение е възможно само след извършването на многократни експерименти. Познаването на тези параметри е необходимо, за да се даде оценка на възможните резултати, които биха се получили с една или друга вероятност в процес на измерване.

Графично зависимостта $W(x)$ се изобразява с крива от вида на показаните на фиг. 2.4.



***Фиг. 2.4.***

Площта между всяка една от кривите и абсцисната ос е равна на $1$, а вероятността за непрекъснатата величина $X$ да се получават стойности от даден интервал $[x_1, x_2]$ се определя с израза

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} W(x).dx. \tag{2.4}$$

Нормално разпределение с параметри $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ се нарича ***нормирано*** или ***стандартно*** и се означава с $N(x,0,1)$. Функцията $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ се нарича плътност на вероятностите на стандартното разпределение и обикновено се дава с таблица за положителните стойности на $x$.

***Оценки на параметрите.*** Нека $x_i^*, i = [1,...,n]$ са резултатите от многократно измерване на физичната величина с истинска стойност $X$, която разбира се, е неизвестна. Това множество от резултати се нарича извадка. Параметрите на статистическото разпределение на извадката се използват за оценка на неизвестните параметри на теоретичното разпределение на вероятностите.

Ако на оценка подлежи един - единствен параметър $r$, в този случай се говори за ***точкова оценка*** - $\hat{r}$ и тя представлява функция от резултатите на измерването, т.е. $\hat{r}(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. За да дава добро приближение, тази оценка трябва да отговаря на изискванията: да не бъде изместена, да бъде ефективна и да удовлетворява условието за сходимост. Неизместена е тази оценка, чието математическо очакване е равно на истинската стойност. Мярка за изместването на оценката е дисперсията $D(\hat{r})$, мярка за ефективността е отношението на дисперсиите на най-добрата оценка (т.е. тази с най-малка дисперсия) и неизместената оценка, а мярка за сходимостта е изпълнението на вероятностното равенство $\lim_{n\to\infty} P(|\hat{r} - r| < \varepsilon) = 1$, където $\varepsilon$ е произволно малко число.

В случая за истинската стойност на величината $X$ може да се съди от средноаритметичната стойност $\hat{X}$ на извадката, т.е.

$$\hat{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^* . \tag{2.5}$$

Мярка за изместването на тази оценка е дисперсията $D = \hat{S}^2$ на извадката:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^* - \hat{X})^2 . \tag{2.6}$$

Дисперсията има димениция, съответстваща на квадрата на случайната величина. При $n$ измервания (ограничен брой) тази оценка се оказва изместена от теоретичната дисперсия $\sigma^2$ и затова се въвежда т.нар. поправка на Бесел, като формула (2.6) придобива следния вид:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^* - \hat{X})^2 , \tag{2.7}$$

При $n \to \infty$, $\hat{S}^2 \to \sigma$ .

***Интервална оценка*** се нарича всяко множество от точкови оценки, което е функция от резултатите на измерването и, разбира се, е случайно. Затова на всяка интервална оценка съответства определена вероятност, наречена доверителна. Ако $\hat{r}$ е оценка на параметъра $r$ и за произволно $\varepsilon > 0 \to |r - \hat{r}| < \varepsilon$, то интервалната оценка ще бъде т. нар. доверителен интервал $|\hat{r} - \varepsilon, \hat{r} + \varepsilon|$. Граничните точки на доверителния интервал $\hat{r} - \varepsilon$ и $\hat{r} + \varepsilon$ са функции на резултатите от измерването.

Доверителната вероятност в този случай се определя от вероятността за едновременното осъществяване на двете събития: $[(\hat{r} - \varepsilon) < r]$ и $[r < (\hat{r} + \varepsilon)]$, изчислена по всички възможни стойности на параметъра $r : [(\hat{r} - \varepsilon) < r < (\hat{r} + \varepsilon)]$.

Математическата статистика позволява получаването само на интервални оценки, чиято доверителна вероятност ***P*** е близка до *1*, например*: 0.9; 0.95; 0.99; 0.999.*

***Проверка на статистическите хипотези.*** Всяко непротиворечиво множество от предположения относно теоретичното разпределение на величината *X* се нарича статистическа хипотеза - *H*.

Нека да се разполага с някаква фиксирана извадка от стойности с обем *n*. Критерий за статистическата хипотеза *H* се нарича правилото, позволяващо да се отхвърли или приеме тази хипотеза въз основа на извадката $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Всеки критерий определя една критична област от стойности. Хипотезата *H* се отхвърля, ако извадката $x_i^*$ принадлежи към критичното множество, и се приема в противен случай.

Такъв подход не дава логически доказателства за подтвърждението или отхвърлянето на предположението. Тук са възможни следните *4* случая:

1. Хипотезата *H* е вярна и се приема в съответствие с критерия.
2. Хипотезата *H* е невярна и се отхвърля в съответствие с критерия.
3. Хипотезата *H* е вярна, но се отхвърля съгласно критерия.
4. Хипотезата *H* е невярна, но се приема съгласно критерия.

***Ниво на значимост.*** Нивото на значимост $\alpha$ определя големината на критичната област. Желателно е да се използва такава критична област, че вероятността да бъде малка, ако проверяваната хипотеза е вярна и съответно голяма в противния случай ($\alpha = 1 - P$).

Нивото на значимост се използва в следните случаи:

- за намиране на доверителния интервал за оценката на математическото очакване при нормално разпределение и неизвестно $\sigma$ (използват се коефициентите на *t* - разпределението на Стюдент);

- за определяне на критичните стойности на $W_\alpha$ по критерия на Шапиро-Уилкс за нормалност на разпределението;

- за определяне на критичните стойности по критерия на Грабс $G_\alpha$ за откриване на груби грешки;

- за определяне на интервалните оценки по метода на подредените статистики.

### *2.2.2. Методически указания за изпълнение на задачите*

**При изпълнение на задача 1** се използва показаната на фиг. 2.1. схема. С помощта на захранващия блок към веригата може да се подава регулируемо по големина постоянно напрежение Uрег. Извършва се многократно измерване (примерно n = 20) на напрежението и тока, като за целта се използват цифрови мултимери, единият в режим на амперметър, а вторият – в режим на волтметър. Напрежението се измерва при положение 2 на ключа К, а токът – при положение 1 на ключа К. Отделните измервания се извършат за n различни произволни стойности на Uрег., покриващи целия обхват на единия от двата мултимера (милиамперметъра или волтметъра). Изчисляването на съответните стойности за $R_i$ по формула 2.1 и по-нататъшната обработка се извършват с помощта на персонален компютър, с инсталирана специално разработена приложна програма.

В програмата се записват зададените от ръководителя на упражнението стойности на доверителната вероятност $P$, нивото на значимост $\alpha$ и на получените резултати от измерванията на $I_i$ и $U_i$. Изчислените стойности на съпротивлението $R_i$ заедно с измерените стойност на $I_i$ в mA и $U_i$ във V се нанасят в табл. 2.1.

**Таблица 2.1**

| **поредно измерване** | **-** | **1** | **2** | **…** | **n** |
|---|---|---|---|---|---|
| **$U_i$** | V | | | | |
| **$I_i$** | mA | | | | |
| **$R_i$** | Ω | | | | |

**При изпълнение на задача 2** се използва най-разпространеният статистически тест за откриване на груби грешки - тестът на Грабс. Той се провежда върху вариационния ред в следната последователност:

1. Изчислява се критерият

(2.8)
$$G_1 = \frac{x_{(n)} - \hat{X}}{\breve{S}},$$

когато се проверява най-големият резултат, и критерият

(2.9)
$$G_2 = \frac{\hat{X} - x_{(1)}}{\breve{S}},$$

когато се проверява най-малкият от резултатите.

2. Приема се ниво на значимост $\alpha$ и от табл. 2.2 се отчита критичната стойност на $G_\alpha$.

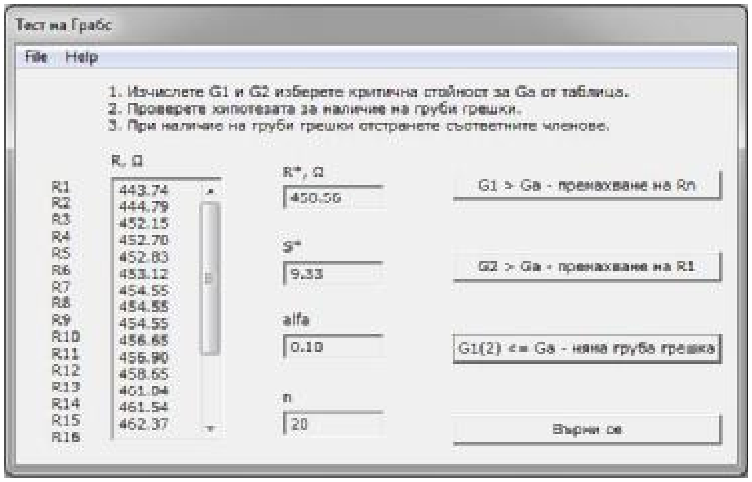
3. При $G_{1(2)} > G_\alpha$ хипотезата за наличие на груба грешка се приема, а ако $G_{1(2)} \leq G_\alpha$ тя се отхвърля.

Ако се открие груба грешка в даден резултат, той се отстранява от понататъшна обработка.

Най-напред се подлага на проверка този от крайните членове на вариационния ред, за който разликата $\hat{X} - x_{(1)}$ или $x_{(n)} - \hat{X}$ е по-голяма. Ако хипотезата за наличие на груба грешка се потвърди, тогава се проверява следващият по големина член, докато хипотезата се отхвърли и за двата крайни члена на остатъка от вариационния ред. Резултатът се въвежда в компютърната програма. (фиг. 2.5)

**Таблица 2.2 Критични стойности на критерия на Грабс $G_\alpha$**

| α<br>**n** | **0.01** | **0.05** | **0.10** |
|---|---|---|---|
| **3** | 1.414 | 1.414 | 1.412 |
| **4** | 1.728 | 1.710 | 1.689 |
| **5** | 1.972 | 1.917 | 1.869 |
| **6** | 2.161 | 2.067 | 1.996 |
| **7** | 2.310 | 2.182 | 2.093 |
| **8** | 2.431 | 2.273 | 2.172 |
| **9** | 2.532 | 2.349 | 2.238 |
| **10** | 2.616 | 2.414 | 2.294 |
| **11** | 2.689 | 2.470 | 2.343 |
| **12** | 2.753 | 2.519 | 2.387 |
| **13** | 2.809 | 2.563 | 2.426 |
| **14** | 2.859 | 2.602 | 2.461 |
| **15** | 2.905 | 2.638 | 2.494 |
| **16** | 2.946 | 2.670 | 2.523 |
| **17** | 2.983 | 2.701 | 2.551 |
| **18** | 3.017 | 2.728 | 2.577 |
| **19** | 3.049 | 2.754 | 2.601 |
| **20** | 3.079 | 2.779 | 2.623 |
| **21** | 3.106 | 2.801 | 2.644 |
| **22** | 3.132 | 2.823 | 2.664 |
| **23** | 3.156 | 2.843 | 2.683 |
| **24** | 3.179 | 2.862 | 2.701 |
| **25** | 3.200 | 2.880 | 2.718 |
| **26** | 3.220 | 2.897 | 2.734 |
| **27** | 3.239 | 2.913 | 2.749 |
| **28** | 3.258 | 2.929 | 2.764 |
| **29** | 3.275 | 2.944 | 2.778 |
| **30** | 3.291 | 2.958 | 2.792 |
| **31** | 3.307 | 2.972 | 2.805 |
| **32** | 3.322 | 2.985 | 2.818 |
| **33** | 3.337 | 2.998 | 2.830 |
| **34** | 3.351 | 3.010 | 2.842 |



1. Изчислете G1 и G2 изберете критична стойност за Ga от таблица.
2. Проверете хипотезата за наличие на груби грешки.
3. При наличие на груби грешки отстранете съответните членове.

|  | R, Ω |
|---|---|
| R1 | 443.74 |
| R2 | 444.79 |
| R3 | 452.15 |
| R4 | 452.70 |
| R5 | 452.83 |
| R6 | 453.12 |
| R7 | 454.55 |
| R8 | 454.55 |
| R9 | 454.55 |
| R10 | 456.65 |
| R11 | 456.90 |
| R12 | 458.65 |
| R13 | 461.04 |
| R14 | 461.54 |
| R15 | 462.37 |
| R16 |  |

R*, Ω: 450.56
S*: 9.33
alfa: 0.10
n: 20

*Фиг. 2.5.*

**При изпълнението на задачи 3 и 4** се определят параметрите на статистическите характеристики на теоретичното множество от данни и по-специално проверява се хипотезата за нормалност на разпределението**.** Хипотезата се проверява съгласно следната процедура:

– Изчисляват се стойностите на оценките $\hat{X}$ и $\hat{S}^2$ по формули 2.5 и 2.7 (данните могат да се вземат и от компютърната програма ($R^*$ и $S^*$)).

– Подреждат се резултатите $x_i^*, i = [1,\dots,n]$ в ред по големина (вариационен ред): $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(i)} < \dots < x_{(n-1)} < x_{(n)}$, тук в скоби са означени индексите след подреждане на резултатите (данните също се вземат от компютъра).

Изчислява се величината $b = \sum_{i=1}^{l} a_{n-i+1}(x_{n-i+1} - x_i)$, където стойностите на $a_{n-i+l}$ за $i = [1,\dots,l]$ се отчитат от табл. 2.3. Когато n е нечетно число, $l = (n-1)/2$. В противен случай $l = n/2$ (Изчислената стойност за $b$ се взима от компютъра.)

– Изчислява се критерият

$$W = \frac{1}{(n-1)}\cdot\frac{b^2}{\hat{S}^2}. \tag{2.10}$$

– Ръководителят на упражнението задава нивото на значимост α и от табл. 2.4 за дадения брой измервания студентите отчитат критичната стойност на критерия $W_\alpha$.

– Ако $W \geq W_\alpha$, хипотезата за нормално разпределение на случайната грешка се приема. В противен случай тя се отхвърля, като след допускането, че вероятностното разпределение е симетрично, обработката се извършва по метода с подредените статистики.

Резултатът се въвежда в следващия прозорец на компютърната програма (фиг.2.6).

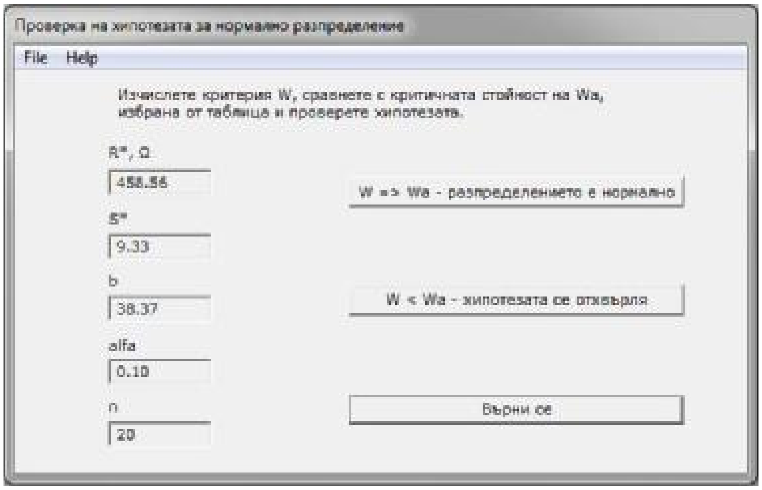
**Таблица 2.3 Коефициенти *a*(*n*-*i*+*1*), използвани при проверка за нормалност**

| **n**<br>**i** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0.7071 | 0.6872 | 0.6646 | 0.6431 | 0.6233 | 0.6052 | 0.5888 | 0.5739 |
| **2** |  | 0.1677 | 0.2413 | 0.2806 | 0.3031 | 0.3164 | 0.3244 | 0.3291 |
| **3** |  |  |  | 0.0875 | 0.1401 | 0.1743 | 0.1976 | 0.2141 |
| **4** |  |  |  |  |  | 0.0561 | 0.0947 | 0.1224 |
| **5** |  |  |  |  |  |  |  | 0.0399 |

| **n**<br>**i** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0.5601 | 0.5475 | 0.5359 | 0.5251 | 0.5150 | 0.5056 | 0.4968 | 0.4886 |
| **2** | 0.3315 | 0.3325 | 0.3325 | 0.3318 | 0.3306 | 0.3290 | 0.3273 | 0.3253 |
| **3** | 0.2260 | 0.2347 | 0.2412 | 0.2460 | 0.2495 | 0.2521 | 0.2540 | 0.2553 |
| **4** | 0.1429 | 0.1586 | 0.1707 | 0.1802 | 0.1878 | 0.1939 | 0.1988 | 0.2027 |
| **5** | 0.0695 | 0.0922 | 0.1099 | 0.1240 | 0.1353 | 0.1447 | 0.1524 | 0.1587 |
| **6** |  | 0.0303 | 0.0539 | 0.0727 | 0.0880 | 0.1005 | 0.1109 | 0.1197 |
| **7** |  |  |  | 0.0240 | 0.0433 | 0.0593 | 0.0725 | 0.0837 |
| **8** |  |  |  |  |  | 0.0196 | 0.0359 | 0.0496 |
| **9** |  |  |  |  |  |  |  | 0.0163 |

| **n**<br>**i** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0.4808 | 0.4734 | 0.4643 | 0.4590 | 0.4542 | 0.4493 | 0.4450 | 0.4407 |
| **2** | 0.3232 | 0.3211 | 0.3185 | 0.3156 | 0.3126 | 0.3098 | 0.3069 | 0.3043 |
| **3** | 0.2561 | 0.2565 | 0.2578 | 0.2571 | 0.2563 | 0.2554 | 0.2543 | 0.2533 |
| **4** | 0.2059 | 0.2085 | 0.2119 | 0.2131 | 0.2139 | 0.2145 | 0.2148 | 0.2151 |
| **5** | 0.1641 | 0.1686 | 0.1736 | 0.1764 | 0.1787 | 0.1807 | 0.1822 | 0.1836 |
| **6** | 0.1271 | 0.1334 | 0.1399 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1512 | 0.1539 | 0.1563 |
| **7** | 0.0932 | 0.1013 | 0.1092 | 0.1150 | 0.1201 | 0.1245 | 0.1283 | 0.1316 |
| **8** | 0.0612 | 0.0711 | 0.0804 | 0.0878 | 0.0941 | 0.0997 | 0.1046 | 0.1089 |

| **n**<br>**i** | **27** | **28** | **29** | **30** | **31** | **32** | **33** | **34** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0.4366 | 0.4328 | 0.4291 | 0.4254 | 0.4220 | 0.4188 | 0.4156 | 0.4127 |
| **2** | 0.3018 | 0.2992 | 0.2968 | 0.2944 | 0.2921 | 0.2898 | 0.2876 | 0.2854 |
| **3** | 0.2522 | 0.2510 | 0.2499 | 0.2487 | 0.2475 | 0.2463 | 0.2451 | 0.2439 |
| **4** | 0.2152 | 0.2151 | 0.2150 | 0.2148 | 0.2145 | 0.2141 | 0.2137 | 0.2132 |
| **5** | 0.1848 | 0.1857 | 0.1864 | 0.1870 | 0.1874 | 0.1878 | 0.1880 | 0.1882 |
| **6** | 0.1584 | 0.1601 | 0.1616 | 0.1630 | 0.1641 | 0.1651 | 0.1660 | 0.1667 |
| **7** | 0.1346 | 0.1372 | 0.1395 | 0.1415 | 0.1433 | 0.1449 | 0.1463 | 0.1475 |
| **8** | 0.1128 | 0.1162 | 0.1192 | 0.1219 | 0.1243 | 0.1265 | 0.1284 | 0.1301 |
| **9** | 0.0923 | 0.0965 | 0.1002 | 0.1036 | 0.1066 | 0.1093 | 0.1118 | 0.1140 |
| **10** | 0.0728 | 0.0778 | 0.0822 | 0.0862 | 0.0899 | 0.0931 | 0.0961 | 0.0988 |
| **11** | 0.0540 | 0.0598 | 0.0650 | 0.0697 | 0.0739 | 0.0777 | 0.0812 | 0.0844 |
| **12** | 0.0358 | 0.0424 | 0.0483 | 0.0537 | 0.0585 | 0.0629 | 0.0669 | 0.0706 |
| **13** | 0.0178 | 0.0253 | 0.0320 | 0.0381 | 0.0435 | 0.0485 | 0.0530 | 0.0572 |
| **14** |  | 0.0084 | 0.0159 | 0.0227 | 0.0289 | 0.0344 | 0.0395 | 0.0441 |
| **15** |  |  |  | 0.0076 | 0.0144 | 0.0206 | 0.0262 | 0.0314 |
| **16** |  |  |  |  |  | 0.0068 | 0.0131 | 0.0187 |
| **17** |  |  |  |  |  |  |  | 0.0062 |



Изчислете критерия W, сравнете с критичната стойност на Wa, избрана от таблица и проверете хипотезата.

R*, Ω: 458.56

S*: 9.33

b: 38.37

alfa: 0.10

n: 20

*Фиг. 2.6.*

**Таблица 2.4 Критични стойности $W_\alpha$ за критерия за нормалност**

| α<br>**n** | **0.01** | **0.05** | **0.10** |
|---|---|---|---|
| **3** | 0.753 | 0.767 | 0.789 |
| **4** | 0.687 | 0.748 | 0.792 |
| **5** | 0.686 | 0.762 | 0.806 |
| **6** | 0.713 | 0.788 | 0.826 |
| **7** | 0.730 | 0.803 | 0.838 |
| **8** | 0.749 | 0.818 | 0.851 |
| **9** | 0.764 | 0.829 | 0.859 |
| **10** | 0.781 | 0.842 | 0.869 |
| **11** | 0.792 | 0.850 | 0.876 |
| **12** | 0.805 | 0.859 | 0.883 |
| **13** | 0.814 | 0.866 | 0.889 |
| **14** | 0.825 | 0.874 | 0.895 |
| **15** | 0.835 | 0.881 | 0.901 |
| **16** | 0.844 | 0.887 | 0.906 |
| **17** | 0.851 | 0.892 | 0.910 |
| **18** | 0.858 | 0.897 | 0.914 |
| **19** | 0.863 | 0.901 | 0.917 |
| **20** | 0.868 | 0.905 | 0.920 |
| **21** | 0.873 | 0.908 | 0.923 |
| **22** | 0.878 | 0.911 | 0.926 |
| **23** | 0.881 | 0.914 | 0.928 |
| **24** | 0.884 | 0.916 | 0.930 |
| **25** | 0.888 | 0.918 | 0.931 |
| **26** | 0.891 | 0.920 | 0.933 |
| **27** | 0.894 | 0.923 | 0.935 |
| **28** | 0.896 | 0.924 | 0.936 |
| **29** | 0.898 | 0.926 | 0.937 |
| **30** | 0.900 | 0.927 | 0.939 |
| **31** | 0.902 | 0.929 | 0.940 |
| **32** | 0.904 | 0.930 | 0.941 |
| **33** | 0.906 | 0.931 | 0.942 |
| **34** | 0.908 | 0.933 | 0.943 |

**<u>При изпълнение на задача 5</u>**, ако хипотезата за нормално разпределение се потвърди, се извършва обработката на резултатите $x_i^*, i=[1,...,n]$ от многократните измервания по следния алгоритъм:

– Изчисляват се оценките за математическото очакване на резултата от измерването $\hat{X}$ и за средноквадратичната грешка $\hat{S}$ по формули (2.5) и (2.7). или се взимат от компютъра.

– По зададена от ръководителя на упражнението доверителна вероятност P и като се вземе предвид, че степените на свобода са k = n – 1, от табл. 2.5 се отчита коефициентът на Стюдент t(P, k).

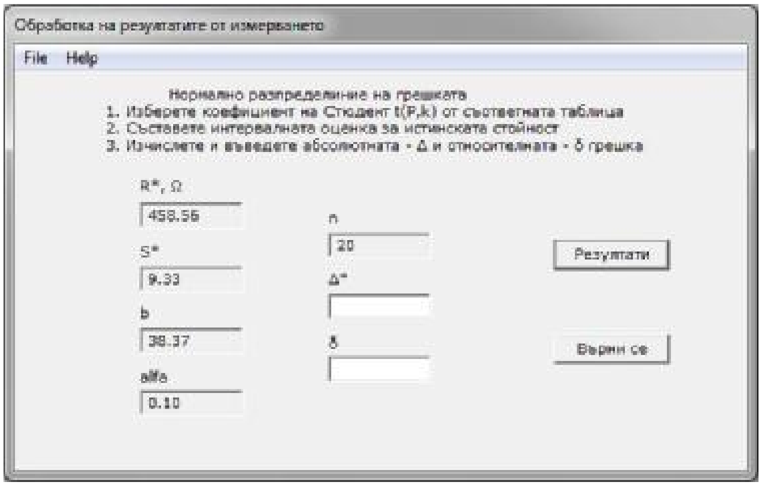
– Съставя се интервалната оценка за истинската стойност:

$$J\{\ X\ \} = \hat{X} \pm t(\ P;k\ ).\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} = (\ \hat{X} \pm \hat{\Delta}\ ) \text{, димeнсия.} \tag{2.11}$$

– Изчислява се относителната грешка $\delta = (\hat{\Delta} / \hat{X}).100\%$ .

– Крайният резултат от измерването се представя във формата $\hat{X};\hat{\Delta};P$ или $J\{X\} = (\hat{X} \pm \hat{\Delta})$, димeнсия, P.

Полученият резултат за абсолютна грешка $\hat{\Delta}$ и относителната $\delta$ се записва в компютърната програма като $\Delta^*$ *и* $\delta$ (фиг. 2.7).



Нормално разпределение на грешката
1. Изберете коефициент на Стюдент t(P,k) от съответната таблица
2. Съставете интервалната оценка за истинската стойност
3. Изчислете и въведете абсолютната - Δ и относителната - δ грешка

R*, Ω: 458.56
S*: 9.33
b: 38.37
alfa: 0.10
n: 20
Δ*:
δ:

***Фиг. 2.7.***

В случай, че хипотезата за нормално разпределение на случайната грешка се отхвърли, то след допускането, че вероятностното разпределение е симетрично, обработката се извършва по следния (свободен от разпределение) алгоритъм, наречен метод с подредени статистики:

– Съставя се вариационният ред (виж по-горе).

– Определя се оценката за истинската стойност на измерваната величина по формулата

(2.12) $$\hat{X} = \begin{cases} a)(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)})/2, \\ b)x_{(\frac{n+1}{2})}, \end{cases},$$

където: *a)* е за четно *n*, *b)* е за нечетно *n*.

– Изчислява се интервалната оценка при зададена от ръководителя на упражнението доверителна вероятност *P*: $[\mathrm{x}_{(\mathrm{m})}, \mathrm{x}_{(\mathrm{n-m+1})}]$, където $m(< n/2)$ се отчита за n и P от табл. 2.6. За *m* се избират стойности, при които $P_{табл.} > P$.

– Определя се абсолютната грешка $\hat{\Delta}$ (по-голямата от разликите $x_{(n-m+1)} - \hat{X}$ и $\hat{X} - x_{(m)}$).

– Изчислява се относителната грешка $\delta = (\hat{\Delta} / \hat{X}).100\%$ .

Резултатите отново се записват в програмата (фиг. 2.8), като в полето за *R** се записва оценката за истинската стойност на измерваната величина $\hat{X}$, изчислена по формула 2.12.

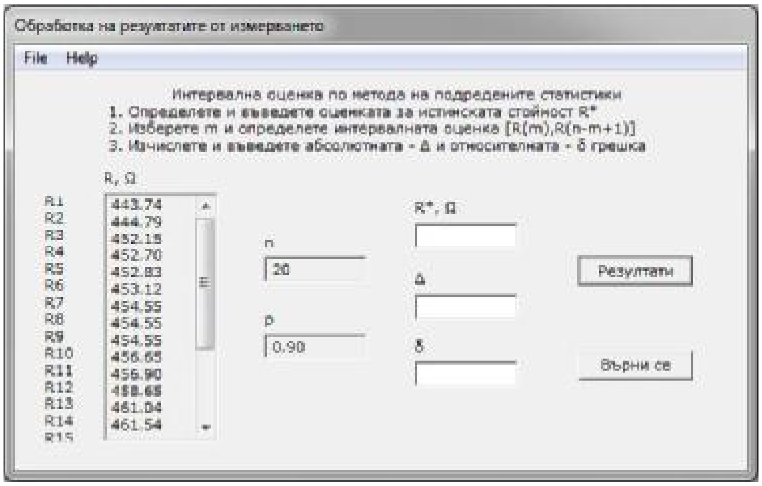
**Таблица 2.5 Коефициенти на Стюдент t(P;k)**

| P<br>k | 0.99 | 0.95 | 0.90 | P<br>k | 0.99 | 0.95 | 0.90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 63.7 | 12.71 | 6.31 | **18** | 2.88 | 2.10 | 1.734 |
| **2** | 9.92 | 4.30 | 2.92 | **19** | 2.86 | 2.09 | 1.729 |
| **3** | 5.84 | 3.18 | 2.35 | **20** | 2.84 | 2.09 | 1.725 |
| **4** | 4.60 | 2.77 | 2.13 | **21** | 2.83 | 2.08 | 1.721 |
| **5** | 4.03 | 2.57 | 2.02 | **22** | 2.82 | 2.07 | 1.717 |
| **6** | 3.71 | 2.45 | 1.943 | **23** | 2.81 | 2.07 | 1.714 |
| **7** | 3.50 | 2.36 | 1.895 | **24** | 2.80 | 2.06 | 1.711 |
| **8** | 3.36 | 2.31 | 1.860 | **25** | 2.79 | 2.06 | 1.708 |
| **9** | 3.25 | 2.26 | 1.833 | **26** | 2.78 | 2.06 | 1.706 |
| **10** | 3.17 | 2.23 | 1.812 | **27** | 2.77 | 2.05 | 1.703 |
| **11** | 3.11 | 2.20 | 1.796 | **28** | 2.76 | 2.05 | 1.701 |
| **12** | 3.06 | 2.18 | 1.782 | **29** | 2.76 | 2.04 | 1.699 |
| **13** | 3.01 | 2.16 | 1.771 | **30** | 2.75 | 2.04 | 1.697 |
| **14** | 2.98 | 2.14 | 1.761 | **40** | 2.70 | 2.02 | 1.684 |
| **15** | 2.95 | 2.13 | 1.753 | **60** | 2.66 | 2.00 | 1.671 |
| **16** | 2.92 | 2.12 | 1.746 | **120** | 2.62 | 1.98 | 1.658 |
| **17** | 2.90 | 2.11 | 1.740 | ∞ | 2.58 | 1.96 | 1.645 |

**При изпълнение на задача 6** се прилага методът, минимизиращ средноквадратичната грешка от апроксимация при определяне на съпротивлението *R*.

Много често в измервателната практика се налага да се построяват апроксимиращи полиноми с предварително познат аналитичен вид, в който са неизвестни само параметрите, а в някои случаи дори не е известна и степента на алгебричния полином, описващ функционалната зависимост

(2.13) $$Y = Y(X, C_1, ..., C_l).$$



Интервална оценка по метода на подредените статистики

1. Определете и въведете оценката за истинската стойност R*
2. Изберете m и определете интервалната оценка [R(m),R(n-m+1)]
3. Изчислете и въведете абсолютната - Δ и относителната - δ грешка

| | R, Ω |
|---|---|
| R1 | 443.74 |
| R2 | 444.79 |
| R3 | 452.15 |
| R4 | 452.70 |
| R5 | 452.83 |
| R6 | 453.12 |
| R7 | 454.55 |
| R8 | 454.55 |
| R9 | 454.55 |
| R10 | 456.65 |
| R11 | 456.90 |
| R12 | 458.65 |
| R13 | 461.04 |
| R14 | 461.54 |

n: 20

p: 0.90

R*, Ω:

Δ:

δ:

***Фиг. 2.8.***

Ако се разполага с *n* двойки стойности $( x_i ; y_i ), i = [1,...,n]$, съответно за аргумента *X* и функцията *Y*, се поставя задачата (във всичките ѝ варианти) да бъде постигнато максимално приближение според определен критерий на аналитичния израз на функцията $Y( X )$ към множеството входни данни.

В конкретния случай се измерва $I_i \rightarrow x_i$ и $U_i \rightarrow y_i$ и се познава видът на функцията $U = R.I$, където $R \rightarrow C$ е неизвестно.

Един от най-разпространените критерии е този, минимизиращ средноквадратичната грешка от апроксимация.

Съгласно този критерий *(T)* параметрите се избират така, че средноаритметичната стойност на квадратите на разликите между експерименталните стойности и ординатите на аналитичния израз за съответните точки на измерване да бъде минимална.

Ако функцията (2.13) има вида $U = R.I$, тогава

(2.14) $$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - R.I_i\right)^2$$ , откъдето

(2.15) $$\frac{dT}{dR} = -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i - R.I_i\right).I_i = 0.$$

Решението на (2.15) води до резултата

(2.16) $$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} U_i.I_i}{\sum_{i=1}^{n} I_i^2} .$$

***Забележка.*** *Ако не е известна степента m на апроксимиращия алгебричен полином, първоначално се приема m = 1. Построява се апроксимиращата зависимост по описания вече начин и се проверява дали* $max(\delta_i) \leq \varepsilon_0$, *където* $\varepsilon_0$ *е допустимата грешка. Ако това условие не се* *изпълнява, увеличава се степента на полинома* $m$ *и пак се прави същата проверка. Степента* $m$ *не може да надвишава* $n$*. По този алгоритъм обикновено при* $m = 5\text{-}6$ *се получават удовлетворителни резултати.*

Нанасят се измерените резултати за $U_i$ и $I_i$ върху правоъгълна координатна система заедно с аналитично построената зависимост U = R.I, където R е изчислено по метод, минимизиращ средноквадратичната грешка от апроксимация.

**Таблица 2.6** **Стойности на *m* за подредени статистики**

| **n** | **Pтабл. ≥ 0.90**<br>**m(Pтабл.)** | **Pтабл. ≥ 0.95**<br>**m(Pтабл.)** | **Pтабл. ≥ 0.99**<br>**m(Pтабл.)** |
|---|---|---|---|
| **9** | 1 (0.930) | | |
| **10** | 1 (0.956) | 1 (0.956) | |
| **11** | 1 (0.973) | 1 (0.973) | |
| **12** | 1 (0.984) | 1 (0.984) | |
| **13** | 2 (0.905) | 1 (0.990) | 1 (0.990) |
| **14** | 2 (0.939) | 1 (0.994) | 1 (0.994) |
| **15** | 2 (0.961) | 2 (0.961) | 1 (0.997) |
| **16** | 3 (0.906) | 2 (0.976) | 1 (0.998) |
| **17** | 3 (0.938) | 2 (0.985) | 1 (0.999) |
| **18** | 3 (0.960) | 3 (0.960) | 2 (0.991) |
| **19** | 4 (0.911) | 3 (0.974) | 2 (0.995) |
| **20** | 4 (0.940) | 3 (0.984) | 2 (0.997) |
| **21** | 4 (0.960) | 4 (0.960) | 3 (0.990) |
| **22** | 5 (0.918) | 4 (0.974) | 3 (0.994) |
| **23** | 5 (0.944) | 4 (0.983) | 3 (0.996) |
| **24** | 5 (0.962) | 5 (0.962) | 3 (0.998) |
| **25** | 6 (0.926) | 5 (0.974) | 4 (0.993) |
| **26** | 6 (0.949) | 5 (0.983) | 4 (0.996) |
| **27** | 7 (0.907) | 6 (0.965) | 4 (0.997) |
| **28** | 7 (0.934) | 6 (0.976) | 5 (0.993) |
| **29** | 7 (0.953) | 7 (0.953) | 5 (0.996) |
| **30** | 8 (0.918) | 7 (0.968) | 5 (0.997) |
| **31** | 8 (0.941) | 7 (0.978) | 6 (0.993) |
| **32** | 9 (0.902) | 8 (0.958) | 6 (0.996) |
| **33** | 9 (0.928) | 8 (0.971) | 7 (0.990) |
| **34** | 9 (0.948) | 8 (0.979) | 7 (0.993) |

### 2.3. Контролни въпроси

1. С каква цел се използва ключът ***K*** в схемата за измерване?
2. Кой е източникът на систематична грешка в еквивалентната схема на измерване от фиг. 2.3?
3. Възможно ли е в процеса на измерване да се получи резултат, равен на математическото очакване?
4. Как влияе параметърът $\sigma$ върху формата на Гаусовата крива.
5. Коя оценка се използва, ако трябва с една-единствена стойност да бъде оценен резултатът от многократно измерване?
6. Каква е връзката между доверителната вероятност и доверителния интервал?
7. Как се променя точността на измерванията, ако броят им се увеличи?