

ЛЕКЦИЯ 17

доц. д-р СТЕЛА СТЕФАНОВА

СПЕКТЪР НА ПЕРИОДИЧЕН СИГНАЛ. ХАРМОНИЧЕН (СПЕКТРАЛЕН, ФУРИЕ) АНАЛИЗ

1. Същност на спектралния анализ

Доказано е по математически път от френския математик Фурие, че всяка периодична функция, в частност, всяка периодично повтаряща се импулсна поредица или всеки периодично повтарящ се хармоничен сигнал може да бъде разложен в краен или безкраен ред на Фурие т.е. да се представи като сума от краен или безкраен брой непрекъснати (аналогови) хармонични трептения с честоти, кратни на основната честота.

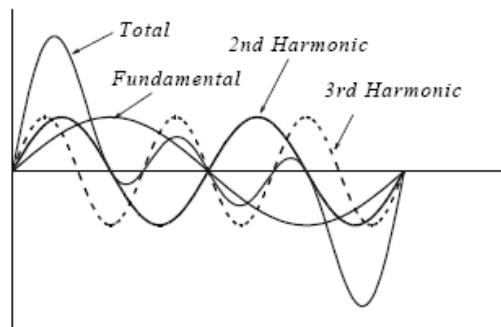
$$u(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n(\infty)} A_i f_i \quad ,$$

където A_0 – постояннотоковата съставляща;

A_i , $i = 1 \dots n(\infty)$ – амплитуда на хармоника;

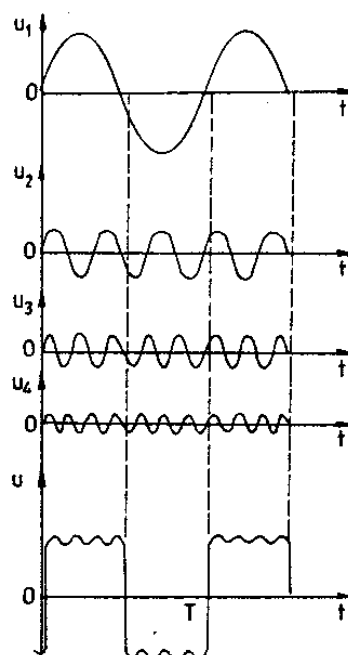
f_i , $i = 1 \dots n(\infty)$ – честота на хармоника.

На Фиг. 1 са показани основният (първи) хармоник и следващите два (втори, трети) хармоници на периодичен сигнал.



Фиг. 1. Основен, втори и трети хармоник на периодичен сигнал

Графично представяне на основния и следващите три хармоника на периодична импулсна поредица е показано на Фиг.2.



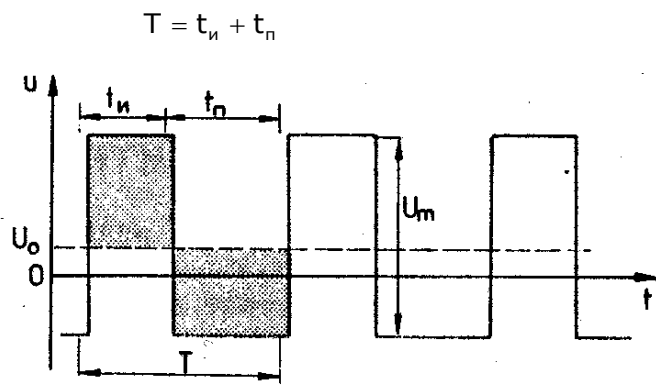
Фиг. 2. Първите четири хармоника на импулсна поредица

2. Спектър и спектрален състав на импулсите

2.1. Основни понятия при хармоничния анализ

2.1.1. Постояннотокова съставяща на импулсна поредица

На Фиг.3 е показана периодична импулсна поредица с период на повторение T и амплитуда U_m .



Фиг. 3. Периодична поредица от двуполярни правоъгълни импулси

- Постояннотоковата съставяща на импулсна поредица се получава като усреднена стойност на сигнала за един период;
- Геометрично се получава като се прекара линия, която разделя импулса на 2 равни по площ части - U_0 (Фиг. 3);
- При двуполярна импулсна поредица с коефициент на запълване равен на 0.5, постояннотоковата съставяща е 0 и геометрично съвпада с абсцисната ос;
- При униполярна импулсна поредица с коефициент на запълване равен на 0.5 има постояннотокова съставяща, която усреднява сигнала.

2.1.2. Коефициент на запълване на импулсна поредица

Отношението на продължителността на импулса към периода на повторение:

$$\gamma = \frac{t_{и}}{T}$$

2.1.3. Основна честота (основен или първи хармоник)

- Честота на повторение на импулсната поредица $f_1 = \frac{1}{T}$;
- Основният хармоник представлява полезният сигнал, подаден на входа на системата;
- Основният хармоник е с най-ниска честота в спектъра на сигнала и трябва да бъде с най-голяма амплитуда.

2.1.4. Хармоник (съставяща, компонента)

- Аналогово, непрекъснато, синусоидално трептене с честота кратна на основната и с пропорционално намаляваща амплитуда.

Хармоник	Честота	Амплитуда
първи	$f_1 = \frac{1}{T}$	U_1
втори	$f_2 = \frac{2}{T} = 2f_1$	$U_2 = \frac{U_1}{2}$
.....		
n-ти	$f_n = \frac{n}{T} = nf_1$	$U_n = \frac{U_1}{n}$

2.1.5. Спектрален състав

- Всички хармонични трептения, от които е съставен един периодичен сигнал.

2.1.6. Брой хармоници

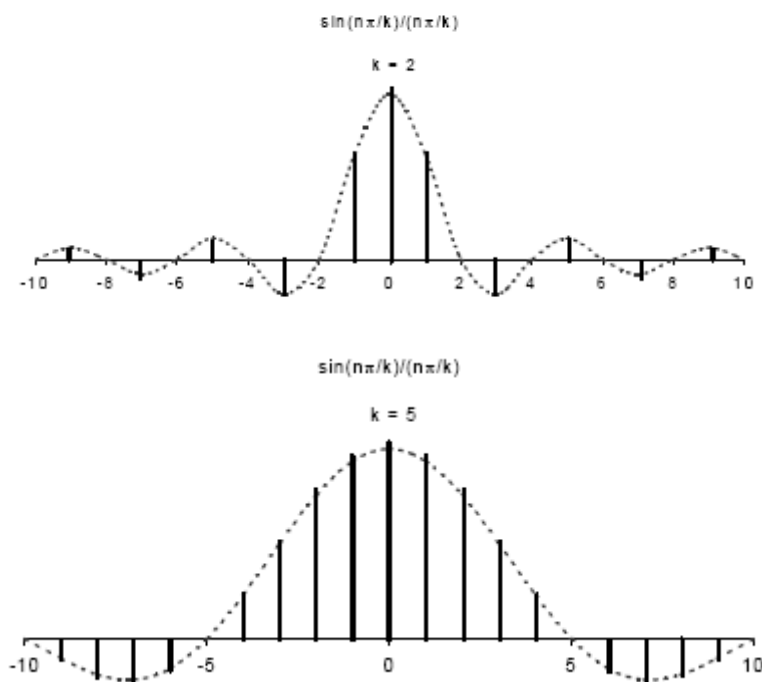
- Теоретично е безкраен, но влиянието на хармониците с по-висока честота силно намалява поради силно намаляващата амплитуда.

2.1.7. Спектрална диаграма. Спектър

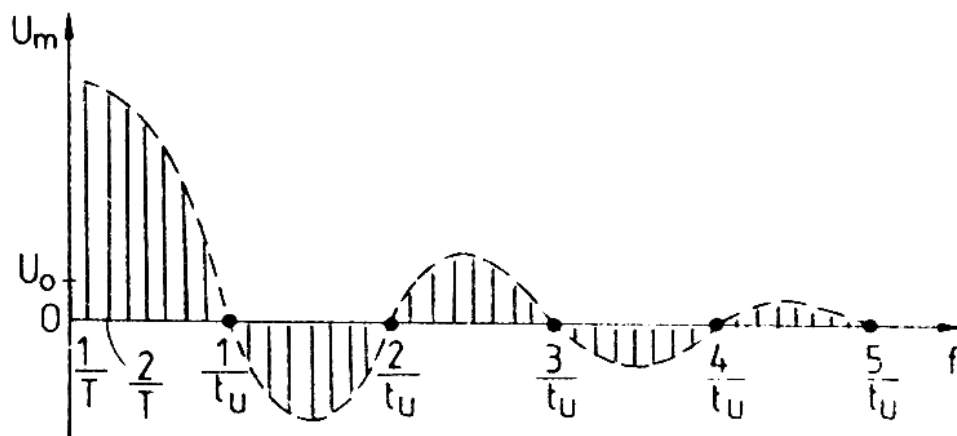
- Ако всеки хармоник се представи като вертикална отсечка с дължина, пропорционална на неговата амплитуда, и на разстояние върху абсцисната ос, пропорционално на неговата честота, се получава спектралната диаграма (спектър) на периодичния сигнал;

Обвивката на спектъра на сигнала следва характера на изменение на функцията $\frac{\sin(x)}{x}$, както е показано на Фиг. 4.

Спектралната диаграма на двуполярна, периодично повтаряща се импулсна поредица е показана на Фиг. 5.



Фиг. 4. Характер на изменение на обвивката на спектъра



Фиг.5. Спектралната диаграма на периодично повтаряща се импулсна поредица

С увеличаване на номерата на хармониците техните амплитуди намаляват, като това намаляване не е плавно;

Съществуват честоти, които липсват в спектъра на сигнала. Честотите на нулиране на спектъра са кратни на реципрочната стойност на коефициента на запълване на импулсната поредица:

$$k \frac{n}{T} \quad n = 1, 2, \dots$$

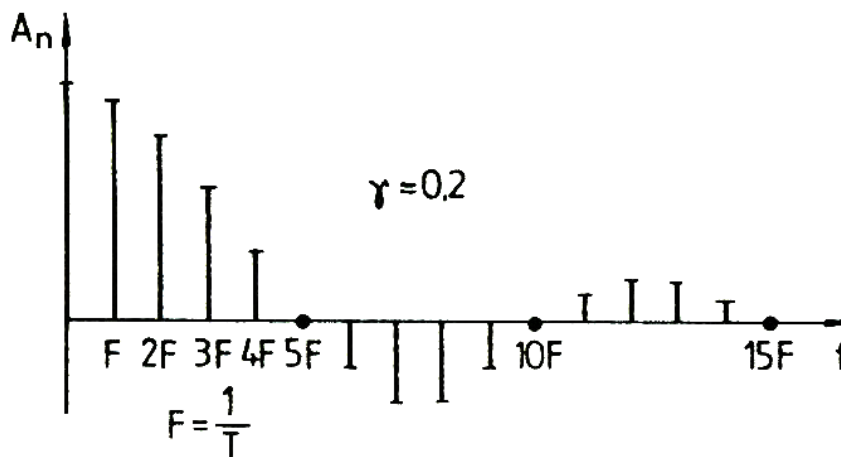
където коефициентът на кратност $k = \frac{1}{\gamma} = \frac{T}{t_{и}}$,

тогава честотите на нулиране на спектъра са $\frac{n}{t_{и}}$ $n = 1, 2, \dots$ или $\frac{1}{t_{и}}, \frac{2}{t_{и}}, \frac{3}{t_{и}}, \dots$

След честотите на нулиране на спектъра на сигнала, хармониците сменят знака си. Това означава, че началната фаза на отрицателните хармоници се различава със 180 градуса от началната фаза на положителните хармоници.

2.1.8. Спектр на импулсна поредица с коефициент на запълване различен от 0,5

Спектърът на импулсна поредица с коефициент на запълване различен от 0,5 т.е. при $\gamma = 0,2$ е показан на Фиг. 6. Честотите на нулиране на спектъра са кратни на реципрочната стойност на γ т.е. всеки пети хармоник ще липсва в спектъра на сигнала.



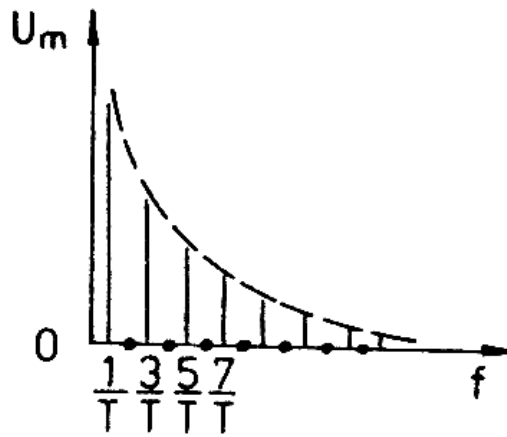
Фиг.6. Спектралната диаграма на периодично повтаряща се импулсна поредица при $\gamma = 0,2$

Характерни особености на спектъра при $\gamma = 0,2$:

- Съществува постоянна съставяща в спектъра, която се изобразява при $f=0$ (A_0);
- Честотите на нулиране на спектъра, т.е. хармониците, които липсват в спектъра на сигнала, са кратни на реципрочната стойност на коефициента на запълване γ ;
- Съществуват отрицателни хармоници с начална фаза, дефазирани на 180 градуса по отношение на началната фаза на положителните хармоници;
- Обвивката на спектъра е математическата функция $\sin(x)/x$;
- Амплитудите на висшите хармоници намаляват с увеличаване на тяхната честота.

2.1.9. Спектр на импулсна поредица с коефициент на запълване равен на 0,5

Спектърът на импулсна поредица с коефициент на запълване равен на 0,5 т.е. при $\gamma = 0,5$ е показан на Фиг. 7. Честотите на нулиране на спектъра са кратни на реципрочната стойност на γ т.е. всеки втори (всеки четен) хармоник ще липсва в спектъра на сигнала.



Фиг.7. Спектралната диаграма на периодично повтаряща се импулсна поредица при $\gamma = 0,5$

Характерни особености на спектъра при $\gamma = 0,5$:

- Няма постояннотокова съставяща;
- Липсват четните хармоници в спектъра на сигнала;
- Няма отрицателни хармоници;
- Обвивката на спектъра следва изменението на спадаща експоненциална функция.

2.1.10. Спектър на непериодичен импулс

- Ако импулсът е единичен, се допуска, че периодът на повторение клони към безкрайност;
- Спектралната диаграма на непериодичен сигнал съдържа абсолютно всички хармоници с честоти от 0 до безкрайност, т.е. спектърът е безкрайно широк или непрекъснат;
- Колкото импулсът е по-кратък във времето, т.е. колкото коефициент на запълване е по-малък, толкова е по-широк спектърът на сигнала и е необходима по-широка честотна лента на преносната среда за предаване на този импулс.

2.1.11. Коефициент на нелинейни изкривявания

Дефинира се като отношение на средноквадратичната сума на амплитудите на висшите хармоници към амплитудата на първия хармоник и се изразява в проценти;

Трябва да бъде с малка стойност за добре проектираните схеми

$$\text{КНИ, \%} = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots + A_n^2}}{A_1} \cdot 100$$

2.1.12. Динамичен диапазон

Дефинира се като логаритмична мярка на отношението на сигнал / шум т.е. на отношението на амплитудата на първия хармоник в спектъра на сигнала (полезният сигнал) към шумовото напрежение;

Задава се в децибели и трябва да бъде голямо число.

$$D = 20 \log \frac{\text{Сигнал}}{\text{Шум}} = 20 \log \frac{A_1}{U_{\text{шум}}}, \text{ dB}$$

2.2. Спектрален (хармоничен, Фурие) анализ в PSPICE

2.2.1. Команда на PSPICE за спектрален анализ

Командата в Pspice за дефиниране на анализа се записва във вида:

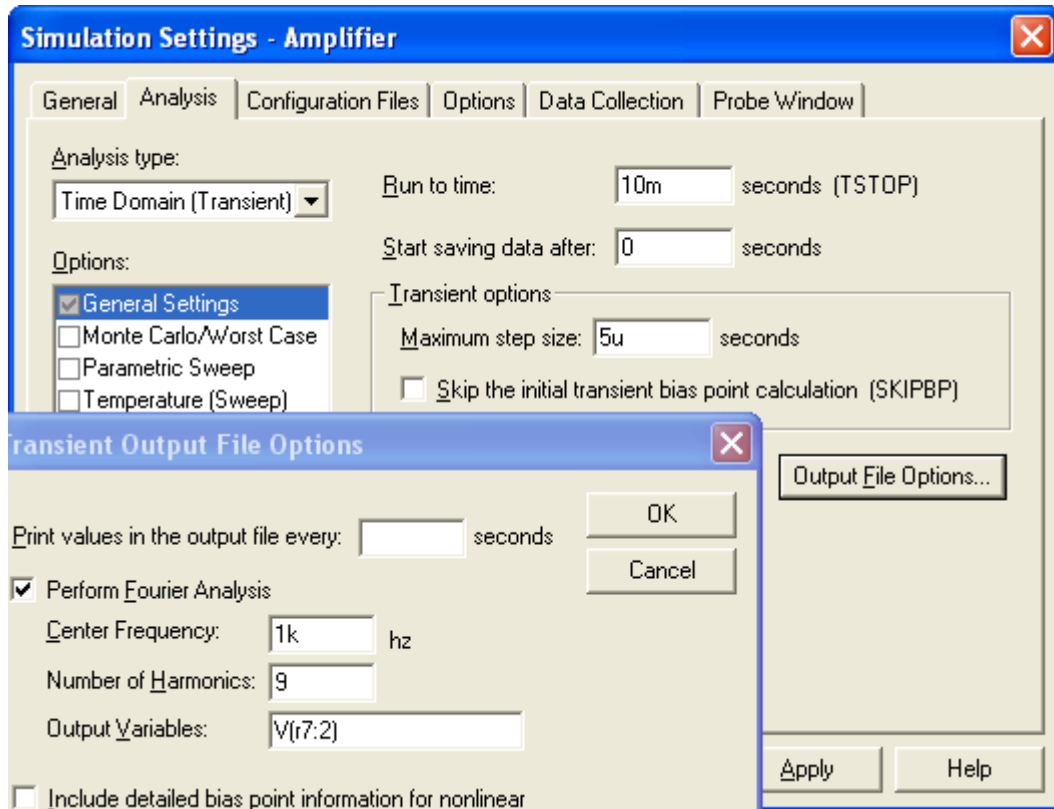
.FOUR <f₁> <изх. променлива> ,

- където f₁ – честота на първия хармоник
- изходна променлива – възелът, в който се изследва спектърът.

Спектралният анализ се извършва след времевия анализ и се прилага за участък след преминаване на преходните процеси в края на интервала на периода T=1/f. Обикновено се изчисляват първите девет хармоника и постоянната съставяща.

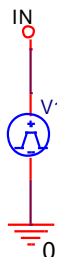
2.2.2. Диалогов прозорец на командата за Фурие анализ

Диалоговият прозорец на командата и параметрите на спектралния анализ са показани на Фиг. 8.



Фиг.8. Диалогов прозорец на командата за Фурие анализ

За осъществяване на спектралния анализ е необходимо в схемния проект да бъдат поставени на входа на системата независим източник на сигнал, описан като времева функция. Този източник на сигнал може да бъдат импулсен или синусоидален източник на ток или напрежение с дефинирани параметри, както е показано на Фиг. 9.



		PSpiceOnly	Reference	Value	AC	DC	PER	PW	Source Part	TD	TF	TR	V1	V2
1	SCHEMATIC1 : PAGE1 : V1	TRUE	V1	VPULSE	50m	50m	1m	0.2m	VPULSE.Normal	0	100u	100u	0	50m

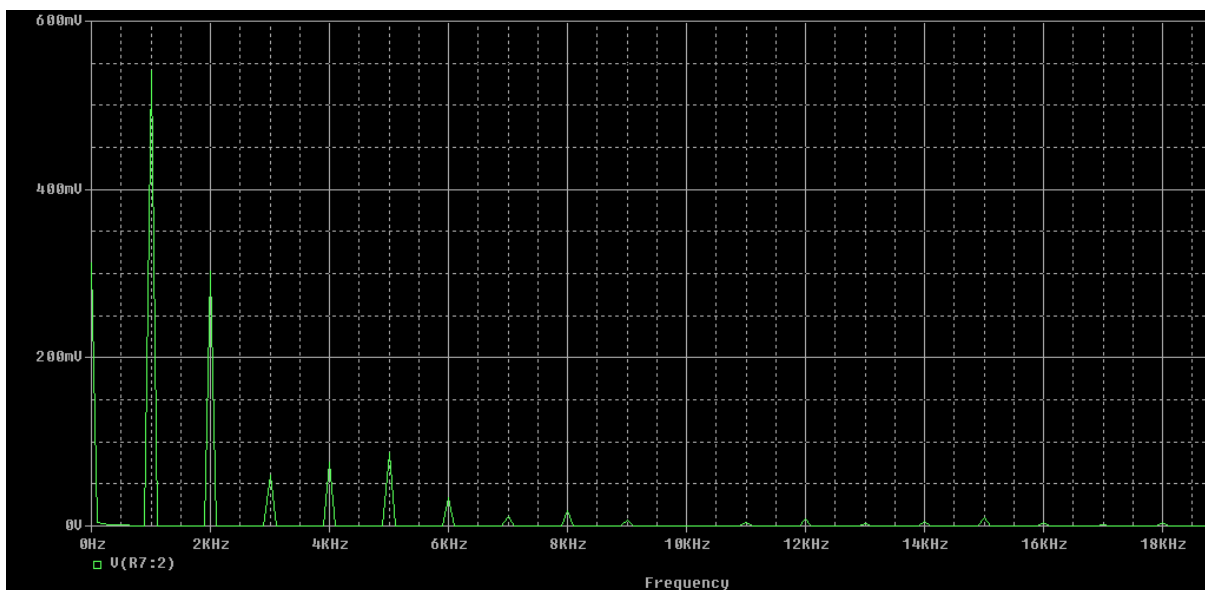
Фиг.9. Параметри на независимия източник на сигнал, преставащ импулсна поредица на входа на схемата

2.3. Резултати от Фурие анализ на усилвателна схема

Спектралният анализ на усилвателна схема може да бъде извършен при входен източник на сигнал импулсна поредица или синусоиден хармоничен сигнал. В изходния файл се извежда подробна информация за:

- Амплитудата на постоянната съставяща;
- честотата, амплитудата и фазата на хармониците в спектъра;
- коефициента на нелинейни изкривявания.

На Фиг. 10 е показана спектралната диаграма на сигнала в изхода на усилвателна схема при входен независим източник на напрежение, представляващ импулсна поредица с параметри, показани на Фиг. 9.



Фиг. 10. Спектър на сигнала в изхода на усилвателна схема при импулсна поредица на входа

На Фиг.11 са показани резултатите от Фурие анализа, изведени в изходния файл. Нормираните компоненти се получават по отношение на амплитудата и фазата на основния хармоник. Последният 158 ред в изходния файл е коефициентът на нелинейни изкривявания в проценти.

```
142: DC COMPONENT = 3.063545E-01
143:
144: HARMONIC   FREQUENCY   FOURIER   NORMALIZED   PHASE   NORMALIZED
145:   NO        (HZ)        COMPONENT COMPONENT (DEG)   PHASE (DEG)
146:
147:   1      1.000E+03   5.411E-01  1.000E+00   1.795E+01  0.000E+00
148:   2      2.000E+03   3.024E-01  5.588E-01  -5.410E+01 -9.001E+01
149:   3      3.000E+03   5.998E-02  1.109E-01  -1.261E+02 -1.800E+02
150:   4      4.000E+03   7.571E-02  1.399E-01  -1.827E+01 -9.008E+01
151:   5      5.000E+03   8.657E-02  1.600E-01  -9.033E+01 -1.801E+02
152:   6      6.000E+03   3.354E-02  6.199E-02  -1.625E+02 -2.702E+02
153:   7      7.000E+03   1.107E-02  2.045E-02  -5.427E+01 -1.799E+02
154:   8      8.000E+03   1.887E-02  3.488E-02  -1.265E+02 -2.701E+02
155:   9      9.000E+03   6.643E-03  1.228E-02  1.612E+02  -3.344E-01
156:
157:
158: TOTAL HARMONIC DISTORTION = 6.126716E+01 PERCENT
---
```

Фиг.11. Резултатите от Фурие анализа, изведени в изходния файл